FELIX KLEIN

VORLESUNGEN ÜBER DIE ENTWICKLU[N] DER MATHEMATIK IM 19. JAHRHUNDERT

TEIL II

DIE GRUNDBEGRIFFE DER INVARIANTENTHEORIE UND IHR EINDRIN[GEN] IN DIE MATHEMATISCHE PHYSIK

FÜR DEN DRUCK BEARBEITET VON

R. COURANT UND ST. COHN-VOSSEN

Published and Distributed in the Public Interest by
Authority of the Attorney General under License No. A-1438

FELIX KLEIN

VORLESUNGEN ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 19. JAHRHUNDERT

TEIL II

DIE GRUNDBEGRIFFE DER INVARIANTENTHEORIE UND IHR EINDRINGEN IN DIE MATHEMATISCHE PHYSIK

FÜR DEN DRUCK BEARBEITET VON
R. COURANT UND ST. COHN-VOSSEN

Published and Distributed in the Public Interest by
Authority of the Attorney General under License No. A-1438

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK, N.Y.
1950

18984

Printed in the United States of America

Vorwort.

Der vorliegende zweite und letzte Band dieser Vorlesungen entstammt den Jahren 1915 bis 1917, der Zeit, als die allgemeine Relativitätstheorie die Gedanken aller Mathematiker und Physiker auf sich lenkte. Felix Klein als Siebzigjähriger hat die neuen Theorien mit einer außerordentlichen Energie durchgearbeitet. Die aus dieser Forschungsperiode stammenden Seminarprotokolle, Korrespondenzen, Vortragskonzepte, Notizen und Ausarbeitungen füllen, von Klein selbst geordnet, sieben umfangreiche Aktenmappen. Nur der kleinere Teil davon bildet die Grundlage dieses Bandes. Anderes findet sich in einzelnen Abhandlungen Kleins wieder. Vieles aber, was schon bis zum ausführlichen Entwurf ausgearbeitet ist, hat Klein nicht mehr zum Abschluß bringen können.

So ist auch dieser zweite Band Fragment geblieben. Geplant war ein systematisches Vordringen von den ersten invariantentheoretischen Ansätzen in der Geometrie bis zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Kleins persönliche Anteilnahme war mehr bei der mathematischen Vorgeschichte der Einsteinschen Lehre, als bei ihrer endgültigen physikalischen Ausprägung. Diese Vorgeschichte hat er zu einer Darstellung in drei Kapiteln gebracht, die er so noch nicht für den Druck bestimmt hatte. Sie ist es, die im Folgenden zu fast ungeändertem Abdruck gelangt.

Das vierte Kapitel sollte die allgemeine Relativitätstheorie behandeln, sowie die Hamiltonsche Mechanik unter besonderer Würdigung der Lieschen Theorien der Berührungstransformationen und der kontinuierlichen Gruppen. Dieses Kapitel ist leider nicht fertig geworden. Es sind aus verschiedenen Jahren zahlreiche Entwürfe dafür vorhanden, keiner aber in einer Form, die den Herausgebern es ermöglicht hätte, sie druckreif zu machen, ohne in unzulässiger Weise Kleins Ansätze mit eigenen Formulierungen zu vermischen.

Das Fehlen des vierten Kapitels beeinträchtigt freilich mehr den Aufbau des Buches in sich, als seine Bedeutung für die Öffentlichkeit. An Darstellungen der Relativitätstheorie als solcher besteht kaum ein Mangel. Die gedankliche und auch die historische Verwachsenheit der modernen Ansätze mit der Mathematik des 19. Jahrhunderts findet dagegen im vorliegenden Buche ihre erste ausführliche Behandlung. Vorkenntnisse, Schulung und selbständige Mitarbeit setzt der zweite Band vielleicht in etwas höherem Maße voraus als der erste; das Biographische tritt gegenüber dem ersten Bande zurück.

Für die Fertigstellung des Textes trägt der jüngere der Herausgeber allein die Verantwortung. Wie im ersten Bande war das leitende Prinzip, so wenig an dem Kleinschen Manuskript zu ändern wie möglich. Dennoch erschienen einige stilistische Änderungen unumgänglich; ein Buch kann nicht durchweg dieselbe Sprache sprechen wie eine Vorlesungsausarbeitung, die für einen beschränkten Leserkreis bestimmt war. Sachlich ist der Text nirgends geändert. Die Fortentwicklung der Wissenschaft in dem Jahrzehnt, das seit dem Abschluß des Kleinschen Manuskripts vergangen ist, machte aber einige Zusätze erforderlich; es sind das erstens manche der Fußnoten, die wie im ersten Band durch ein hinzugefügtes (H.) von Kleins eigenen Fußnoten unterschieden sind, zweitens Erläuterungen am Kapitelschluß, auf die im Text gewöhnlich durch das Zeichen * verwiesen ist. Auch die Erläuterungen sind für geschulte Leser bestimmt und knapp gehalten.

Beim Lesen der Korrekturen haben die Herren Neugebauer, Friedrichs, Lewy und Grell wertvolle Hilfe geleistet. Herrn D. J. Struik verdanken wir wichtige sachliche Anregungen bei der Durchsicht des Manuskripts.

Göttingen, Oktober 1927.

R. Courant,
St. Cohn-Vossen.

Inhaltsverzeichnis.

Drittes Kapitel.

Gruppen analytischer Punkttransformationen bei Zugrundelegung einer quadratischen Differentialform.

A. Die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen der klassischen Mechanik.

B. Die Lehre von der inneren Geometrie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten auf der Grundlage von Gauß' Disquisitiones circa superficies curvas.

C. Riemanns n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. I. Die formalen Grundlagen.

D. Riemanns n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. II. Normalkoordinaten. Geometrische Deutungen.

E. Einiges von der Weiterentwicklung über Riemann hinaus.

Einleitung.

Der erste Band hatte mit einer Darlegung der Bedeutung geschlossen, welche die Lehre von den *diskontinuierlichen* Transformationsgruppen und den bei ihnen unveränderlichen, den „automorphen“ Funktionen in den letzten Jahrzehnten für die verschiedensten Zweige der Mathematik gewonnen hat.

Wir wenden uns jetzt der nicht minder weitreichenden Entwicklung und Bedeutung zu, welche die *kontinuierlichen* Transformationsgruppen in demselben Zeitraum gewonnen haben. Aber wir werden für unsere Berichterstattung keine streng chronologische Anordnung wählen. Die weitergehenden Arbeiten von Lie, die 1870 mit rein geometrischen Untersuchungen begannen und bald für das Gesamtgebiet der Differentialgleichungen von weitreichender Bedeutung werden sollten, schieben wir einstweilen noch zurück. Wir knüpfen vielmehr an das Referat an, das in Bd. 1, Kapitel IV über die Entwicklung der „algebraischen“ Geometrie gegeben wurde. Nach den Grundsätzen, welche ich in meinem Erlanger Programm (1872) entwickelte, lassen sich die verschiedenen Richtungen der dabei benutzten Ansätze dahin charakterisieren, daß es sich jeweils um die *Invariantentheorie einfacher linearer Transformationsgruppen* handelt. Nun hat sich etwas sehr Merkwürdiges begeben. Die Klassifikation der geometrischen Theorien nach der Art der zugrunde gelegten Transformationsgruppe hat nämlich auf den Bereich der Mechanik und mathematischen Physik übergegriffen und sich auch hier als sicherer Leitfaden zur Erfassung heute im Vordergrunde stehender Ideen erwiesen. Ich meine diejenigen Spekulationen, welche man unter dem Namen *Relativitätstheorie* zusammenfaßt. Sie sind zunächst gänzlich unabhängig von den Arbeiten der Geometer entstanden: durch Entwicklung der Fragestellungen, die sich an Maxwells elektromagnetische Auffassungen anschlossen. Daß sie unbewußt zu ganz ähnlichen Formulierungen hingeführt haben, wie unsere rein mathematischen Ansätze, ist eines der merkwürdigsten Beispiele für die von Zeit zu Zeit immer wieder hervortretende, trotz aller Spezialisierung der neueren Arbeitsrichtungen bestehende Einheitlichkeit der wesentlichen Fortschritte des mathematischen Denkens. Diesen Parallelismus hervorzukehren liegt zu sehr im Interesse meiner Gesamtdarstellung, als daß ich ihn hier mir entgehen lassen dürfte. Ich darf um so mehr darauf eingehen, als ich ohnehin schon — Bd. 1, Kapitel V —

die Entwicklung der Mechanik und mathematischen Physik bis zum Einschluß der Maxwellschen Arbeiten geführt habe. Als Inhalt der im folgenden zu gebenden Darstellung kann geradezu der Zusammenschluß der zwei Kapitel bezeichnet werden, die in Bd. 1 lose nebeneinander gestellt worden sind. Zugleich gewinne ich, indem ich die Grundgedanken des Erlanger Programms solcherweise an einfachen Beispielen erläutere, eine gute Basis für die später zu gebende Besprechung der Lie'schen Arbeiten.

Die Erreichung des so gesetzten Zieles verlangt freilich gewisse Vorbereitungen. Soll es nicht nur bei ganz allgemeinen Aussagen bleiben, so muß eine genauere Kenntnis wenigstens der Elemente der allgemeinen linearen Invariantentheorie vorausgesetzt werden, als vermutlich vorhanden ist. Ich beginne also mit einigen einschlägigen Erörterungen, die ich dadurch im Sinne meiner Gesamtdarstellung zu beleben suche, daß ich überall Bemerkungen über die historischen Zusammenhänge einschalte. Eine gewisse Überdeckung mit den Darlegungen von Bd. 1 ist nicht ganz zu vermeiden, doch wird die Auswahl des Stoffes ganz anders getroffen und es tritt auch die Würdigung der Persönlichkeiten als solcher mehr zurück.

Erstes Kapitel.

Elementares über die Grundbegriffe der linearen Invariantentheorie.

A. Ausführungen über allgemeine lineare Invariantentheorie.

§ 1. Lineare Substitutionen. Invariantenbegriff[1]).

Wir führen zunächst irgendwelche n Größen

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

[1]) Als ein kompendiöses und für unsere Zwecke besonders geeignetes Lehrbuch ist Bôchers *Einführung in die höhere Algebra* zu empfehlen (zuerst englisch, New York 1907, deutsch Leipzig 1910, 2. Aufl. 1925). Andererseits nenne ich den ersten Band der Gesammelten Werke von Sylvester (Cambridge 1904). Dort steht auf S. 198—202 eine kurze Note aus dem Cambridge and Dublin Math. Journal IV (1851), betitelt „On the general Theory of associated algebraical forms", wo zum ersten Male der Terminus „Invariante" eingeführt ist. Dann ferner von S. 284 an eine längere, leider unvollendet gebliebene Arbeit „On the principles of the calculus of forms" (Cambridge and Dublin Math. Journal VII [1852]), wo die Ausdrücke „kogredient" und „kontragredient", sowie manche andere, die wir fernerhin gebrauchen, zum ersten Male vorkommen. — Anm. d. Hg.: Inzwischen neu erschienen: Weitzenböck: Invariantentheorie. Groningen 1922.

als Urvariable ein. Sie sollen beliebigen, unimodularen *, homogenen linearen Substitutionen

$$(1)\qquad \begin{array}{c} x_1 = s_{11} x'_1 + \cdots + s_{1n} x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = s_{n1} x'_1 + \cdots + s_{nn} x'_n \end{array} \qquad |s_{ik}| = 1$$

unterworfen werden. „Kogredient" heißen dann zunächst solche Variabelnreihen

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

oder

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \text{ usw.}$$

welche jeweils dieselben Substitutionen (1) erleiden.

Zu den hierzu „kontragredienten" Variabelnreihen kommt man, wenn man eine lineare Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

betrachtet, die durch die Substitution (1) in

$$u'_1 x'_1 + u'_2 x'_2 + \cdots + u'_n x'_n$$

übergehen mag. Indem wir für die x aus (1) ihre Werte in den x' eintragen und die Koeffizienten der einzelnen x' vergleichen, bekommen wir:

$$(2)\qquad \begin{array}{c} u'_1 = s_{11} u_1 + s_{21} u_2 + \cdots + s_{n1} u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u'_n = s_{1n} u_1 + s_{2n} u_2 + \cdots + s_{nn} u_n . \end{array}$$

Gegenüber (1) erscheinen die neuen Variabeln mit den alten, und die Horizontalreihen des Koeffizientenschemas mit den Vertikalreihen vertauscht und eben hierin liegt das Wesen der Kontragredienz. — Offenbar ist das Verhältnis der Substitutionen (1) und (2) zueinander ein gegenseitiges. Wir hätten statt mit den x ebensogut mit den u (oder irgendwelchen zu ihnen kogredienten Größenreihen, die wir in der Folge v oder w, ... nennen) beginnen können (Prinzip der Dualität).

Aus Größenreihen von der Art der x oder u werden wir fortschreitend jetzt andere zusammensetzen, die infolge von (1) bzw. (2) ebenfalls homogene lineare (unimodulare) Substitutionen erfahren. Dahin gehören z. B. die Terme 2. Grades

$$x_1^2,\ 2 x_1 x_2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_n^2,$$

oder auch die bilinearen Verbindungen aus zwei Reihen kogredienter Variabeln:

$$x_1 y_1,\ (x_1 y_2 + x_2 y_1),\ x_2 y_2,\ \ldots,\ x_n y_n,$$

bzw. die anderen

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1),\ (x_1 y_3 - x_3 y_1),\ \ldots,\ (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}).$$

Wir nennen die linearen Substitutionen, die sie infolge von (1) bzw. (2) erleiden, durch (1) bzw. (2) *induziert*. Diese induzierten Substitutionen sind nicht mehr notwendig die allgemeinsten linearen Substitutionen ihrer Art. Im übrigen überträgt sich auf sie der Begriff der Kogredienz und der Kontragredienz.

Nimmt man z. B. eine quadratische Form heran:

$$f(a, x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2,$$

und verlangt, daß $f(a, x)$ mittels (1) in $f(a', x') = a'_{11} x_1'^2 + \cdots + a'_{nn} x_n'^2$ übergeht, so erweisen sich die

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$$

zu den

$$x_1^2,\ 2 x_1 x_2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_n^2$$

kontragredient. Ein spezielles Beispiel einer solchen quadratischen Form ist das Quadrat einer Linearform:

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n)^2;$$

wir schließen, daß die

$$u_1^2,\ u_1 u_2,\ u_2^2,\ \ldots,\ u_n^2$$

zu den

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$$

kogredient sind. (Die Einzelheiten des Ansatzes wolle man durchdenken. Es kommt in Betracht, daß die x_1^2, $x_1 x_2$, $\ldots$, sowie die u_1^2, $u_1 u_2$, $\ldots$, obgleich nicht voneinander unabhängig, doch *linear* unabhängig sind*.)

Jeden Inbegriff nun von irgend N linear unabhängigen Größen, welche infolge von (1) bzw. (2) homogene lineare Substitutionen erleiden, nennen wir mit Sylvester einen *Komplex* (Plexus)[1]. Das Ziel der allgemeinen linearen Invariantentheorie, wie es von ihren Begründern ins Auge gefaßt wurde, läßt sich dann so bezeichnen: Es sind irgendwelche Größenkomplexe vorgelegt. Man soll aus ihnen in allgemeinster Weise Ausdrücke zusammensetzen, die in den Größen jedes einzelnen Komplexes rational, ganz und homogen sind, und die Eigenschaft haben, sich bei den unimodularen Substitutionen (1) bzw. (2) nicht zu ändern.

Als niederstes Beispiel bietet sich sofort die Determinante aus n Reihen kogredienter Größen

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{vmatrix}$$

dar, wie sich durch einfache Anwendung des Determinantenmultiplikationssatzes ergibt. Die Leistung der Theorie aber muß sein und ist es in der Tat, auf solche einfachste Beispiele die Bildung *aller* gesuchten „Invarianten" durch systematische Algorithmen zurückzuführen.

Es ist unmöglich — und für das Folgende auch nicht nötig —,

[1]) Neuerdings auch *lineare Größe* genannt. Vgl. Weyl l. c. S. 205. (H.)

von dem so umrissenen Programm der allgemeinen linearen Invariantentheorie hier eine genaue Ausführung zu geben. Weitergehendes, was sich auch in der Form an die folgenden Erörterungen gut anschließt, findet man z. B. bei Hurwitz in Bd. 45 der Math. Annalen (1894). Es muß genügen, daß wir einzelne einfachste Beispiele von Komplexen und zugehörigen Invarianten betrachten und uns bei ihnen sowohl von dem Sinn als von der Zweckmäßigkeit der aufgestellten Fragestellung überzeugen.

Zuerst werden wir als typische Beispiele von „Komplexen" die von Graßmann in seiner linealen Ausdehnungslehre (1844 bzw. 1862) eingeführten *Stufen geometrischer Größen* einordnen.

§ 2. Die Graßmannschen Stufen.

Neben der Determinante aus n Reihen kogredienter Veränderlicher (x), (y), ..., bzw. (u), (v), ..., die eine Invariante ist (also für sich einen Komplex ausmacht), nannten wir bereits als Beispiel eines Komplexes den Inbegriff der zweigliedrigen Determinanten, die sich aus dem rechteckigen Schema

$$\begin{vmatrix} x_1 \, x_2 \dots x_n \\ y_1 \, y_2 \dots y_n \end{vmatrix}$$

zusammensetzen lassen. Wir würden solche zweigliedrige Determinanten natürlich auch aus Größen u, v zusammensetzen können.

Graßmanns allgemeiner Ansatz geht nun dahin, überhaupt die Komplexe zu betrachten, die sich aus μ Reihen kogredienter Veränderlicher (x), (y), ..., bzw. (u), (v), ... zusammensetzen lassen, wo μ der Reihe nach gleich 0, 1, 2, ..., $(n-1)$ genommen sein soll.

Wir bekommen also, wenn wir vorläufig nur von den (x), (y), ... ausgehen, die folgende Reihe von n *Stufen*[1]):

$\mu = 0$ die reine Zahlgröße (wie Graßmann sagt), zusammenfallend mit dem, was wir Invariante nennen;

$\mu = 1$ die n Größen x_i selbst;

$\mu = 2$ den Komplex der $\frac{n(n-1)}{2}$ zweigliedrigen Unterdeterminanten $(x_i y_k - x_k y_i)$;

$\mu = n-1$ die n Determinanten aus $(n-1)$ Reihen (x), (y), ...

Da die n-reihige Determinante, wie wir bemerkten, eine Invariante ist, so schließt sich die hiermit aufgezählte Reihe von Komplexen zyklisch.

[1]) Daß es sich immer um „Komplexe" handelt, ergibt sich wieder aus dem Determinantenmultiplikationssatze, der in der Tat als das eigentliche Fundament aller linearen Invariantentheorie angesehen werden kann. — Die Graßmannschen Stufen sind erst verhältnismäßig spät der Invariantentheorie explizite eingefügt worden, nämlich durch Clebsch 1872 (Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Bd. 17 der Göttinger Abhandlungen).

Genau so werden wir von den (u) ... ausgehend n Stufen bekommen, deren Beziehung zu den Stufen, die wir aus den (x) ... ableiteten, aufzuklären bleibt.

Die genauere Behandlung knüpfen wir, damit die Darstellung nicht zu abstrakt ausfällt, an die niedersten Zahlenbeispiele an.

Bei $n = 2$ haben wir natürlich noch nichts Neues.

Zu $n = 3$ bemerken wir, daß die zweigliedrigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

zu den kontragredienten Größen

$$u_1,\ u_2,\ u_3$$

beziehungsweise kogredient sind. Dies folgt daraus, daß die dreigliedrige Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

die doch eine Invariante ist, folgendermaßen als Linearform in den z geschrieben werden kann:

$$z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + z_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + z_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Man sieht zugleich, daß bei beliebigem n das entsprechende Theorem für den Komplex der $(n-1)$-reihigen Determinanten gilt.

Betrachten wir nun insbesondere den Fall $n = 4$ (der wegen seines Auftretens in den Spekulationen der modernen Physik für uns besonders wichtig ist). Von den viererlei Stufen $\mu = 0, 1, 2, 3$ können $\mu = 0, 1, 3$ als erledigt gelten, so daß sich unsere Aufmerksamkeit auf $\mu = 2$ richtet.

Wir setzen

(3) $$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$$

(also $p_{ik} = -p_{ki}$).

Indem wir die identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

nach zweigliedrigen Unterdeterminanten entwickeln, schließen wir, daß der Ausdruck

(3') $$P = p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23}$$ [1])

[1]) Gedächtnisregel für die Indizes der Summanden: erstes Glied 12; 34. Dann zyklische Vertauschung der letzten drei Indizes unter Festhaltung des ersten Index 1. (H.)

den Wert Null hat. Die induzierten Substitutionen, welche die p_{ik} bei den linearen Substitutionen der x, y erleiden, müssen also die Gleichung $P = 0$ in sich selbst überführen. In der Tat bemerkt man, daß die p_{ik} an keine andere Bedingung, als eben $P = 0$ geknüpft sind*. Von hier führt nun ein weiterer Schritt zu der Einsicht, daß für irgendwelche (unabhängige) Größen b_{ik} die mit den p_{ik} kogredient sind, der entsprechend gebildete Ausdruck

$$B = b_{12} b_{34} + b_{13} b_{42} + b_{14} b_{23} \tag{4}$$

eine Invariante ist. Wir wollen diesen Schritt näher ausführen, weil analoge Überlegungen in der Invariantentheorie sehr häufig benutzt werden[1]) und er zudem ein Zwischenresultat umschließt, auf das wir uns weiterhin berufen müssen.

Zu dem Zwecke gehen wir von der viergliedrigen Determinante aus:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

die wir nach zweigliedrigen Unterdeterminanten

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k, \quad p'_{ik} = z_i t_k - t_i z_k$$

entwickeln, was

$$p_{12} p'_{34} + p_{34} p'_{12} + \cdots = \sum p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \tag{5}$$

ergibt. Dieser Ausdruck ist also — wie unsere viergliedrige Determinante — eine Invariante, vorausgesetzt, daß die p_{ik} der Gleichung $P = 0$ und die p'_{ik} der entsprechenden Gleichung $P' = 0$ genügen. Nun überzeuge man sich aber von der Tatsache, daß diese quadratischen Gleichungen $P = 0$ bzw. $P' = 0$ irreduzibel sind, d. h. nicht in Faktoren gespalten werden können, die in den p_{ik} bzw. p'_{ik} linear sind. Aber die Invariante (5) enthält die p_{ik} bzw. p'_{ik} ihrerseits nur linear. Wir schließen, daß die invariante Natur von (5) nicht beeinträchtigt wird, wenn man die p_{ik} durch irgendwelche (nicht an die Gleichung $B = 0$ gebundene) kogrediente Größen b_{ik}, die p'_{ik} ebenso durch irgendwelche kogrediente Größen b'_{ik} ersetzt. Läßt man schließlich diese (beliebig zu wählenden) b'_{ik} mit den b_{ik} zusammenfallen, so hat man die invariante Natur des Ausdruckes B erwiesen.

Das Zwischenresultat, welches aus der so skizzierten Überlegung

---

[1]) Vgl. unsere Bemerkung oben über die Kogredienz der u_1^2, $u_1 u_2$, ... mit den a_{11}, a_{12}, ...

herausgehoben werden sollte, ergibt sich aus der invarianten Natur des Ausdrucks (5), der in den p_{ik}, wie in den p'_{ik} linear ist. Er besagt, daß die p'_{ik} (und damit die p_{ik} selbst) den $\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}$ kontragredient sind, d. h., ausführlicher geschrieben, die

$$\begin{array}{lcccccc} & p_{12}, & p_{13}, & p_{14}, & p_{34}, & p_{42}, & p_{23} \quad \text{sind kontragredient} \\ & | & | & | & | & | & | \\ \text{zu den} & p_{34}, & p_{42}, & p_{23}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14}. \end{array}$$

Wir untersuchen nun (immer bei $n = 4$) die Graßmannschen Stufen, die man aus Größen (u), (v), ... aufbauen kann. Daß die (u), ... selbst den dreigliedrigen Unterdeterminanten von Größen (x), (y), (z) kogredient sind, wissen wir bereits und schließen aus dem Prinzip der Dualität, daß die dreigliedrigen Unterdeterminanten aus Größen (u), (v), (w) ihrerseits mit den (x), ... kogredient sind.

Bleiben die zweigliedrigen Unterdeterminanten $q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$ zu betrachten (die natürlich der Gleichung $Q = q_{12} q_{34} + \cdots = 0$ genügen); sie erweisen sich als den p_{ik} kontragredient. Dies folgt daraus, daß die Summe

$$\sum_{i,k} p_{ik} q_{ik}$$

eine Invariante ist. In der Tat ist sie gleich:

$$u_x v_y - v_x u_y$$

(wo u_x, ... in üblicher Abkürzung[1]) für $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$ steht), ist also aus lauter Invarianten aufgebaut.

Kombinieren wir dies noch mit dem, was wir über die Selbstkontragredienz der p_{ik} wissen, so haben wir schließlich: die

$$\begin{array}{lcccccc} & q_{12}, & q_{13}, & q_{14}, & q_{34}, & q_{42}, & q_{23} \\ & | & | & | & | & | & | \\ \text{sind zu den} & p_{34}, & p_{42}, & p_{23}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14} \quad \text{kogredient.} \end{array}$$

Summa: die Größenkomplexe, welche man aus den (u), (v), ... durch Determinantenbildung ableiten kann, ergeben keine anderen Typen induzierter linearer Substitutionen, als die anderen, die man aus den (x), (y), ... gewinnt.

Obengenannter fundamentaler Satz, den wir hier nur für $n = 4$ beweisen haben, tritt bei Graßmann, in Nr. 112 der Ausdehnungslehre von 1862, für beliebiges n in viel konkreterer Form auf. Dies werde hier (wieder nur für $n = 4$) auseinandergesetzt und in Anknüpfung an unseren bisherigen Gedankengang bewiesen.

---

[1]) Siehe z. B. Weitzenböck l. c. S. 2, Fußnote. Eine Verwechselung mit der Abkürzung $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ist hier ausgeschlossen.

Wir gehen von 4 Systemen kogredienter Komplexe (x), (y), (z), (t) aus, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

gleich 1 sein soll. Graßmann denkt sich dann kontragrediente Systeme (u), (v) geradezu durch die dreigliedrigen Unterdeterminanten der rechteckigen Matrizes

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

definiert und behauptet, *daß die aus ihnen zu bildenden* q_{ik} *den korrespondierenden Größen* $p_{ik} = x_i' y_k' - y_i' x_k'$ *gleich seien* (genauer $q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}$).

Das ist im Grunde ein Satz über sogenannte adjungierte Determinanten. Wir können ihn aber im Anschluß an unsere früheren Betrachtungen in anderer Weise erledigen; wir beweisen ihn für einen speziellen Fall, auf den man den allgemeinen Fall durch eine geeignete lineare Substitution (1) reduzieren kann.

Man setze nämlich

$$\begin{aligned} (x) &= 1,\ 0,\ 0,\ 0 \qquad & (z) &= 0,\ 0,\ 1,\ 0 \\ (y) &= 0,\ 1,\ 0,\ 0 \qquad & (t) &= 0,\ 0,\ 0,\ 1 \,. \end{aligned}$$

Man hat dann gewiß

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Ferner folgt aus der Betrachtung der beiden ersten Zeilen dieses Schemas, daß alle p_{ik} bis auf $p_{12} = 1$ verschwinden, sodann aus der Betrachtung der drei ersten Zeilen, bzw. der 1., 2., 4. Zeile, daß die (u) bzw. (v) folgende Werte haben:

$$(u) = 0,\ 0,\ 0,\ 1, \qquad (v) = 0,\ 0,\ -1,\ 0;$$

hieraus wieder, daß alle $q_{ik} = 0$ sind bis auf $q_{34} = 1$. Es bestehen also in der Tat im speziellen Falle die Gleichungen

$$q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}; \tag{6'}$$

wir schließen, daß sie eben darum auch im allgemeinen (von Graßmann betrachteten) Falle bestehen müssen. Denn die q_{ik} sind den $\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}$ bei beliebigen Substitutionen (1) kogredient, und durch beliebige Substitution (1) entsteht aus unserem speziellen Falle der allgemeine*.

§ 3. Von der geometrischen Deutung unserer Größenkomplexe (insbesondere der Graßmannschen Stufen).

Die Größensysteme (Komplexe), welche in der Invariantentheorie homogenen lineraren Substitutionen unterworfen sind, werden gemäß einer wohl auf die Salmonschen oder auch die Hesseschen Lehrbücher zurückgehenden Tradition[1]) meist in der Weise geometrisch interpretiert, daß man nur die Verhältnisse ihrer Komponenten geometrisch deutet. Also (um bei $n = 4$ zu bleiben): die $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ als sogenannte homogene Punktkoordinaten des dreidimensionalen Raumes, die $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ als ebensolche Ebenenkoordinaten, die Verhältnisse der p_{ik} als Linienkoordinaten* usw. Die linearen Substitutionen (1) ergeben dann die Kollineationen des R_3, und das geometrische Korrelat der algebraischen Entwicklung ist die projektive Geometrie.

So fruchtbringend diese Interpretation ist (und so wichtig die projektive Geometrie als selbständige Disziplin erscheint), so streift sie doch die eigentlichen Feinheiten der Invariantentheorie ab. Denn sie kann nie die Invarianten selbst, sondern nur ihr Verschwinden interpretieren. So gibt $u_x = 0$ die „vereinigte Lage" von Punkt und Ebene, der Ausdruck u_x selbst aber bleibt ohne adäquate Deutung. Oder die Determinante $| x\ y\ z\ t |$ ergibt durch ihr Verschwinden die Bedingung, daß vier Punkte in einer Ebene liegen, sie selbst entzieht aber sich der Interpretation.

Demgegenüber scheint es zweckmäßig (und ist durch die physikalischen Anwendungen, die wir im Sinne haben, geradezu geboten), zu der naiven Interpretation zurückzukehren, die auch Graßmanns Ausdehnungslehre zugrunde liegt, daß man nämlich x_1, x_2, x_3, x_4 als gewöhnliche Parallelkoordinaten eines Punktes im vierdimensionalen Raum deutet. Die Substitutionen (1) ergeben dann affine Transformation des R_4 bei festgehaltenem Koordinatenanfangspunkte O; wir können darum x_1, x_2, x_3, x_4 auch als Koordinaten der Strecke auffassen, welche vom Punkte O zum Punkte (x) hinreicht. Die Determinante $| x\ y\ z\ t |$ aber bedeutet den Inhalt des „Parallelopentatops", welches durch die vier von O nach den Punkten (x), (y), (z), (t) laufenden Strecken be-

[1]) Vgl. Bd. 1, S. 159—164.

stimmt ist. Entsprechend finden die zweigliedrigen Determinanten des Schemas

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

oder die dreigliedrigen Determinanten von

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ihre Deutung als Komponenten des Flächeninhalts eines von O auslaufenden Parallelogramms bzw. Parallelepipeds.

Wir sind eben im Bereich der affinen Geometrie des R_4 bei festgehaltenem O und brauchen nur die Vorstellungsweisen dieser Geometrie zu entwickeln, um ein adäquates Bild der sämtlichen invariantentheoretischen Prozesse für $n = 4$ zu haben. In dieser Geometrie ist von Kugeln oder rechten Winkeln, i. e. von den näheren Attributen der metrischen Geometrie noch nicht die Rede: diese kommen erst dann hinzu, wenn wir eine quadratische Form adjungieren (also, um mit Graßmann zu reden, wenn wir von der linealen Ausdehnungslehre zur vollständigen Ausdehnungslehre fortschreiten). Der Begriff der Komponenten eines räumlichen Inhaltes aber ist noch näher zu untersuchen. Nehmen wir die p_{ik}, also die Unterdeterminanten des Schemas

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

Nach den Grundsätzen der Determinantenrechnung bleiben sie dann und nur dann sämtlich ungeändert, wenn man die (x) und (y) bzw. ersetzt durch

$$\varkappa \cdot (x) + \lambda \cdot (y), \qquad \mu \cdot (x) + \nu \cdot (y),$$

vorausgesetzt, daß $\begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$ ist. In der Sprache der Sylvesterschen Invariantentheorie wird man sagen: sie sind *Kombinanten* der (x), (y). Geometrisch heißt dies, daß das Parallelogramm O, (x), (y) in einer Ebene durch seine Komponenten nicht völlig festgelegt ist, sondern in bestimmter Weise (indem seine eine Ecke immer in O bleibt) abgeändert werden kann. Entsprechendes gilt für die Größen höherer Stufe.

Diese „affine" und die „projektive" Deutung der Invariantentheorie sind natürlich nicht in prinzipiellem Gegensatz, sondern können geometrisch — nach dem sogenannten Prinzip des Projizierens und Schneidens — auseinander abgeleitet werden. Die projektive Deutung im R_3 entsteht aus der affinen Deutung im R_4, indem man die dort von O auslaufenden Figuren eben von O aus auf irgend einen im R_4 verlaufenden R_3 projiziert. Da ergibt denn die von O auslaufende Strecke im R_3 einen Punkt, das zweidimensionale von O auslaufende lineare Gebilde im R_3 eine gerade Linie usw. Schließlich kann man die Deutung im R_3 auch noch so ausgestalten, daß auch sie ein volles Bild der analytischen Entwicklungen gibt. Man greift am besten auf die partikuläre Deutung zurück, welche Moebius in seinem baryzentrischen Kalkul (1827) [1]) den homogenen Koordinaten gab. Man interpretiere $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ als gewöhnliche Parallelkoordinaten eines Punktes im R_3 und nenne x_4 sein Gewicht. Setzt man insbesondere $x_4 = 1$, so werden hierbei die p_{ik} Bestimmungsstücke für Linienteile des R_3, die dreigliedrigen Determinanten für Ebenenteile; die viergliedrige Determinante gibt einen Raumteil. Das ist diejenige Interpretation der Graßmannschen Stufen, die ich Bd. 1, Kap. IV erläuterte und von der ich beispielsweise in Teil II meiner Vorlesungen über Elementargeometrie (1908) [2]) ausging; sie ist in der Mechanik der starren Körper überaus vorteilhaft.

Dieselben analytischen Prozesse finden eben je nach dem Gesichtspunkte, den man verfolgt, verschiedene Arten zweckmäßiger Interpretation. Es bleibt bei der Auffassung, welcher Plücker 1831 in der Vorrede zum zweiten Bande seiner „Analytisch-geometrischen Entwicklungen" folgendermaßen Ausdruck gibt:

„Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, daß die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloß als bildende Vorstellung gewisser Beziehungen aus dem großen erhabenen Ganzen erscheint."

Wir werden diesen Ausspruch in der Folge nur noch insofern zu erweitern haben, als für uns neben die Mechanik, diese umfassend, die gesamte mathematische Physik tritt. Dabei würde es uns viele Arbeit sparen, wenn das, was beispielsweise in der projektiven Geometrie erarbeitet ist, auch den Physikern geläufig wäre, bzw. von diesen ohne weiteres in ihre Sprache übersetzt werden könnte. Dies kann natürlich nicht vorausgesetzt werden; ich werde aber doch an einzelnen Stellen darauf hinweisen.

§ 4. Quadratische Formen und ihre Invarianten.

Von linearen Formen u_x ist schon in § 1 hinreichend die Rede gewesen; sprechen wir nun von quadratischen Formen

$$f_{xx} = \sum_{(i,k)}\sum a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + \cdots \quad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{7}$$

Wir bemerkten bereits, daß hier

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ \ldots$$

---

[1]) Ges. Werke Bd. 1, 1885.

[2]) Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Bd. II, Geometrie. 2. Aufl. Berlin 1925.

als kontragredient zu

$$x_1^2, \; 2x_1x_2, \; x_2^2, \; \ldots$$

aufgefaßt werden müssen: indem wir f geben, nehmen wir eben den Komplex dieser Größen a_{11}, a_{12}, a_{22}, ... zu unseren sonstigen Komplexen — den (x), den (u), den Graßmannschen Stufen — hinzu, und wir werden in dem so erweiterten System f selbst als einfachste neue Invariante an die Spitze stellen.

Um an bekannte Dinge anzuknüpfen, sei an die geometrische Bedeutung von f in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ erinnert:

Bei projektiver Deutung bedeutet $f = 0$ für $n = 3$ einen Kegelschnitt, für $n = 4$ eine Fläche 2. Grades.

Bei affiner Deutung werden wir, der Anschaulichkeit wegen, die Gleichungen $f = \text{const}$ betrachten und haben dann bei $n = 3$ eine Schar ähnlicher und ähnlich gelegener Flächen 2. Grades, welche um O als Mittelpunkt in der Weise herumgelegt sind, daß sie alle in denselben „Kegel" $f = 0$ einbeschrieben sind. Analog für $n = 4$ im R_4.

Ein einfacher Prozeß führt uns jetzt zu derjenigen *bilinearen Invariante* von f, welche (um bei $n = 3$ zu bleiben) bei projektiver Deutung die „Polarenverwandtschaft" hinsichtlich des Kegelschnitts $f = 0$, bei affiner Deutung, für die Flächen 2. Grades $f = \text{const}$, den Zusammenhang zwischen „Durchmesser und konjugierter Diametralebene" angibt. Wir setzen für die (x) in f ihnen kogrediente Größen $\lambda \cdot (x) + \mu \cdot (y)$ ein. Ordnen wir dann nach Potenzen der λ, μ so erhalten wir

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\,\lambda\,\mu\, f_{xy} + \mu^2 f_{yy},$$

wo wir abkürzend

$$\sum_{(i,k)}\sum a_{ik} x_i y_k = f_{xy} \tag{7'}$$

gesetzt haben; die mit λ^2, $2\lambda\mu$, μ^2 multiplizierten Terme sind notwendig Invarianten. Die bilineare Invariante f_{xy} nennt man auch in der Algebra gewöhnlich die *Polare* von f.

Die Koeffizienten der in f_{xy} linear auftretenden y_k sind zu diesen notwendig kontragredient. Wir können sie also gleich Größen u_k setzen, d. h. schreiben

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_k a_{k1} x_k \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= \sum_k a_{kn} x_k \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Man nennt diese Formeln gemeinhin (der projektiven Deutung entsprechend) die zu f gehörige Polarenverwandtschaft.

Weitere einfache Invarianten von f erhält man durch Determinantenbildung.

Man kann dabei in zwei Weisen vorgehen:

Entweder man betrachtet zuerst die Koeffizientendeterminante

$$(9)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und reiht an sie eine Kette weiterer Bildungen an, indem man D mit Größen u, bzw. u und v usw., wie der Kunstausdruck heißt „rändert“:

$$(10)\quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & u_1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} \qquad D'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & u_1 & v_1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & u_n & v_n \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & 0 \\ v_1 & \dots & v_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Offenbar erhält man so Formen 2. Grades in den u_i, den $u_i v_k - v_i u_k$ usw., mit Koeffizienten, welche Unterdeterminanten von D sind.

Oder man beginnt wie vorhin bei der Polarenbildung, indem man der Reihe nach für die (x) in f bzw. $\lambda(x) + \mu(y)$, $\lambda(x) + \mu(y) + \nu(z)$, ... usw. einsetzt und so zunächst die Ausdrücke erhält:

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy}$$

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} + 2\lambda\nu f_{xz} + 2\mu\nu f_{yz} + \nu^2 f_{zz},\ \text{usw.},$$

die quadratische Formen der λ, μ bzw. der λ, μ, ν usw. sind. Indem man von diesen quadratischen Formen wieder die Determinanten bildet, erhält man eine Reihe von Ausdrücken, die ich f', f'' nennen will:

$$(11)\qquad f' = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \qquad f'' = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Von diesen Bildungen ist an sich klar, daß sie Invarianten sind, — sind sie doch aus lauter Invarianten aufgebaut. Dagegen bedarf es einer gewissen Überlegung[1]), daß es sich bei ihnen um Formen 2. Grades der sukzessiven Graßmannschen Größen $x_i y_k - y_i x_k$ usw. handelt, deren Koeffizienten wieder Unterdeterminanten von D sind.

Die Sache ist nun die, *daß die $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ in umgekehrter Reihenfolge genommen mit den mit abwechselnden Vorzeichen versehenen D, $-D'$, $+D''$, $-D'''$, ... übereinstimmen, sofern man nur die aus den (x), (y), ... abgeleiteten Stufengrößen nach dem in § 3 ausgesprochenen Graßmannschen Satz durch die komplementären Stufengrößen der (u), (v), ... ersetzt.*

Statt dies allgemein nachzuweisen, was uns hier viel zu weit führen

[1]) D. h. schließlich nur einer wiederholten Anwendung des Determinantenmultiplikationssatzes.

würde, wollen wir es an dem Beispiele, das uns im zweiten Kapitel am meisten beschäftigen wird, nämlich an der quadratischen Form mit 4 Veränderlichen:

$$f = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2$$

durchrechnen.

Man findet:

$$(12)\qquad \begin{aligned} +D &= k_1\, k_2\, k_3\, k_4 \\ -D' &= k_1\, k_2\, k_3\, u_4^2 + \cdots \\ +D'' &= k_1\, k_2\, (u_3 v_4 - v_3 u_4)^2 + \cdots \\ -D''' &= k_4 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}^2 + \cdots \end{aligned}$$

und andererseits:

$$(12')\qquad \begin{aligned} f &= k_1\, x_1^2 + \cdots \\ f' &= k_1\, k_2\, (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + \cdots \\ f'' &= k_1\, k_2\, k_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \cdots \\ f''' &= k_1\, k_2\, k_3\, k_4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}^2, \end{aligned}$$

was mit unserer Behauptung übereinstimmt*.

Dem Projektiviker sind diese Bildungen wohl bekannt. Ist $f = 0$ die Gleichung einer Fläche 2. Grades in Punktkoordinaten, so ist $f' = 0$ ihre Gleichung in Linienkoordinaten, $f'' = 0$ ihre Gleichung in Ebenenkoordinaten usw.

Die hiermit aufgestellten Invarianten von f finden sich in allgemeiner Weise, für beliebiges n, wohl erst bei Cayley und Sylvester. Im besonderen aber gehen sie weit zurück, wie denn die Determinante D' sich für $n = 3$ bereits in den Disquisitiones Arithmeticae von Gauß findet (1801), wo sie (Nr. 267) als „forma adjuncta" bezeichnet wird[1]).

Notieren wir noch für später, daß wir bei 4 Veränderlichen bei Zugrundelegung* unseres f jetzt zwei in den $x_i y_k - x_k y_i = p_{ik}$ quadratische Invarianten kennen. Nämlich von früher her

$$(13)\qquad P = p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23}$$

und jetzt

$$(13')\qquad \sum k_i\, k_k \cdot p_{ik}^2 .$$

[1]) Werke Bd. 1, S. 301.

§ 5. Von der Äquivalenz der quadratischen Formen.

Das eigentliche Ziel aller Invariantentheorie ist die Erledigung des *Äquivalenzproblems*, d. h. der Aufgabe, ob irgendwelche vorgelegte Komplexe, hier also zwei quadratische Formen, durch lineare Substitution der Urvariabeln bzw. durch die mit ihnen gegebenen induzierten Substitutionen ineinander übergeführt werden können. Man wird dabei Grade der Äquivalenz unterscheiden, indem man zuerst noch von der Bedingung absieht, daß die Substitutionsdeterminante gleich 1 sein soll, dann diese Bedingung einführt, später vielleicht eine Beschränkung auf reelle Werte der Substitutionskoeffizienten eintreten läßt, oder sie schließlich, wie in der Zahlentheorie, als reelle ganze Zahlen voraussetzt, usw.

Wir meinen nachstehend Äquivalenz zunächst im allgemeinsten Sinne und können dann hinsichtlich der Äquivalenz zweier quadratischer Formen eine sehr präzise Aussage machen. Zu dem Zweck legen wir der einzelnen quadratischen Form noch ein Attribut bei, das wir, nach der von Frobenius eingeführten Ausdrucksweise, ihren *Rang* nennen. Der Rang ist 1, wenn in der Folge der Funktionen $f, f', f'', \ldots$ bei unbestimmten Werten der $x, y, \ldots$ nur f von Null verschieden ist, während f' und alle folgenden identisch verschwinden (wenn also alle zweigliedrigen Unterdeterminanten, die man aus dem Koeffizientenschema von f bilden kann, und daher auch alle dreigliedrigen Unterdeterminanten usw. Null sind). Der Rang ist 2, wenn f und f' von Null verschieden sind, aber f'' und die folgenden verschwinden, usw. Ist schließlich die Koeffizientendeterminante D selbst $\neq 0$, so ist der Rang n.

Dies vorausgesetzt haben wir das Theorem:

Zwei quadratische Formen sind dann und nur dann (im allgemeinsten Sinne) äquivalent, wenn sie denselben Rang haben.

Daß die Gleichheit des Ranges eine notwendige Bedingung der Äquivalenz ist, erkennt man sofort, wenn man überlegt, daß die zweigliedrigen, dreigliedrigen, ... Unterdeterminanten der a_{ik} bei linearen Substitutionen der (x) je ihrerseits homogene lineare Substitutionen erleiden (daß sie je für sich einen „Komplex" bilden).

Daß das Kriterium aber auch ausreichend ist, ergibt sich aus einer Transformation der vorgelegten quadratischen Form, die dem Wesen der Sache nach auf Jacobi zurückgeht[1]) und eine kanonische Gestalt der Form herstellt, die nur von dem Range r abhängt.

[1]) Vgl. eine nachgelassene Abhandlung „Über eine elementare Transformation eines in bezug auf jedes von zwei Variabelnsystemen linearen und homogenen Ausdrucks", die in Crelles Journal 53 (1857) = Werke, Bd. 3 abgedruckt ist. Jacobi behandelt dort übrigens nur den sog. „allgemeinen" Fall, wo $r = n$ ist (oder besser: wo man die a_{ik} als unbestimmte Größen, die frei veränderlich sind, ansieht). Es hängt das mit seiner ganzen Darstellungsweise zusammen, die sich — im Gegensatz zu dem von Gauß gegebenen Vorbilde — für eine genaue Be-

Um alle Fälle zu umfassen, bringe man die vorgelegte Form zunächst durch eine Hilfstransformation in eine solche Gestalt, daß in dem Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

von den umrandeten Unterdeterminanten (links oben) so viele nicht verschwinden, als überhaupt möglich, nämlich die r ersten. Daß dies möglich ist, überblickt man bequem bei projektiver Deutung von $f = 0$. Daß $a_{11} \neq 0$, heißt dann, daß die erste Ecke des Koordinatensystems nicht auf $f = 0$ liegt; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ heißt, daß die erste von dieser Ecke auslaufende Kante des Koordinatensystems $f = 0$ nicht berührt, usw.

Dies vorausgesetzt bringe man f in die Gestalt

$$\begin{aligned} f &= \frac{(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f_1(x_2 \dots x_n)\,, \\ &= \frac{y_1^2}{a_{11}} + f_1(x_2 \dots x_n)\,, \end{aligned}$$

wo in f_1 das x_1 nicht mehr vorkommt. Das erste Glied in f_1 ist vielmehr

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\, x_2^2\,,$$

wie denn auch die anderen Koeffizienten sich als zweigliedrige Unterdeterminanten der a_{ik} mit dem Nenner a_{11} herausstellen.

Nun fahren wir mit f_1 entsprechend fort, indem wir die Glieder mit x_2 herausziehen. Und so weiter fort, bis das Verfahren mit r Gliedern von selbst abbricht. Schließlich haben wir eine r-gliedrige Summe:

$$(14) \qquad f = \frac{y_1^2}{a_{11}} + \frac{y_2^2}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} + \frac{y_3^2}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + \cdots$$

handlung der Einzelfälle keine Zeit nahm. Dieses Verhalten Jacobis hat bei den Mathematikern für lange Zeit nachgewirkt; auch bei Cayley und Sylvester werden die Ausnahmefälle immer mehr beiläufig angeführt. Erst die neuere Berliner Schule (unter dem Einfluß von Weierstraß und Kronecker) ist zu der Genauigkeit der Gaußischen Darstellung wieder zurückgekehrt. Beides hat natürlich seine Vorzüge; man könnte darüber lange Erläuterungen geben. Das eine Mal kommt mehr das formale Denken (welches vor allem Übersicht anstrebt), das andere Mal mehr das konkrete Denken (welches an Anwendung im Einzelfalle denkt) zur Geltung.

Hier werden wir nun noch

$$\text{(14a)} \qquad \frac{y_1}{\sqrt{a_{11}}} = z_1, \quad \frac{y_2}{\sqrt{a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}} = z_2, \quad \ldots$$

setzen und haben f damit in eine Gestalt gebracht

$$\text{(15)} \qquad f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2,$$

die in der Tat nur von r abhängt, indem die $z_1, z_2, \ldots, z_r$ linear unabhängige Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$ sind, also gegenüber linearen Substitutionen von beliebiger Determinante nichts Individuelles darbieten.

Damit aber ist das Äquivalenzproblem in der allgemeinen Form, die wir voranstellten, erledigt. Die Jacobische Transformation ist für $r = n$ bei projektiver Deutung nichts anderes als die Beziehung eines Kegelschnitts auf ein Polardreieck, einer Fläche 2. Grades auf ein Polartetraeder, — bei affiner Deutung die Einführung eines Systems konjugierter Durchmesser. Der Unterscheidung der Formen f nach dem Range aber entspricht (um bei $n = 4$ und der projektiven Deutung zu bleiben) die Unterscheidung der Flächen 2. Grades in eigentliche Flächen, Kegel, Ebenenpaare und Doppelebenen.

Nun drängt sich von selbst eine weitere Fragestellung auf: es ist möglich, daß die Formeln (14a) imaginäre Quadratwurzeln enthalten. Wie steht es mit der Normalform für f und damit dem Äquivalenzproblem, wenn wir uns auf durchaus *reelle* Substitutionen beschränken?

Wir werden in diesem Fall in (14) positive und negative Koeffizienten unterscheiden und, indem wir die positiven Glieder vorannehmen, abkürzend schreiben

$$f = k_1^2 y_1^2 + \cdots + k_s^2 y_s^2 - k_{s+1}^2 y_{s+1}^2 - \cdots - k_r^2 y_r^2.$$

Hier setzen wir nun

$$k_1 y_1 = z_1, \quad \ldots, \quad k_s y_s = z_s, \quad k_{s+1} y_{s+1} = t_1, \quad \ldots, \quad k_r y_r = t_{r-s}$$

und haben dann vermöge reeller Substitution

$$\text{(16)} \qquad f = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - t_1^2 - \cdots - t_{r-s}^2 \,{}^{1)}.$$

Man hätte nun, um zu dieser reellen Normalform zu kommen, den Reduktionsprozeß auf sehr verschiedene Weise leiten können (was sich bei uns hinter der Hilfstransformation verbirgt, durch die wir $a_{11} \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ usw. erzielten). Und hier gilt nun das wunderbar einfache Gesetz, welches Sylvester im 4. Bande des Philos. Magazine

---

[1]) Die Zahl der Minuszeichen ist offenbar gleich der Zahl der Zeichenwechsel, welche in folgender Reihe auftreten:

$$+1, \quad a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ & & \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

(1852) unter dem Namen des *Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen* bekannt gab (= Werke I, S. 381), und das sich auch in den hinterlassenen Papieren Jacobis vorfand (Crelles Journal 53 (1857) = Werke III, S. 591). Auch findet man es im Riemannschen Nachlaß, wo es aus Gaußschen Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate stammt, die Riemann wahrscheinlich 1846/47 hörte. Werke, Nachträge (1902), S. 59.

Das Gesetz besagt:

Die Anzahl s der positiven Quadrate (bzw. $r-s$ der negativen) ist bei gegebenem f stets dieselbe, wie immer man auch durch reelle lineare Substitutionen die Form (16) *herstellen mag.*

Der Beweis erfolgt sehr einfach indirekt. Wir wollen uns dabei wieder geometrischer Sprechweise bedienen, aber dieses Mal an die affine Deutung anknüpfen (weil es sich um das Vorzeichen von f selbst handelt).

Sei f durch einen zweiten Reduktionsprozeß auf die Gestalt gebracht

$$f = \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_\sigma^2 - \tau_1^2 - \cdots - \tau_{r-\sigma}^2 .$$

Hier sollen die $\zeta_1 \ldots \zeta_\sigma$, $\tau_1 \ldots \tau_{r-\sigma}$ genau so linear unabhängige Verbindungen der ursprünglichen $x_1 \ldots x_n$ sein, wie in (16) die $z_1 \ldots z_s$, $t_1 \ldots t_{r-s}$. Das will sagen, daß die Gleichungen

$$\zeta_1 = 0, \quad \ldots, \quad \zeta_\sigma = 0, \quad \tau_1 = 0, \quad \ldots, \quad \tau_{r-\sigma} = 0$$

zusammen im R_n der $x_1 \ldots x_n$ eine lineare Mannigfaltigkeit von ebensoviel, nämlich $(n-r)$ Dimensionen festlegen, wie die Gleichungen

$$z_1 = 0, \ \ldots, \ z_s = 0, \ t_1 = 0, \ \ldots, \ t_{r-s} = 0$$

ihrerseits.

Wir setzen nun die beiden so erhaltenen Ausdrücke für f einander gleich, schieben die negativen Terme auf die andere Seite und haben als identische Gleichung:

$$z_1^2 + \cdots + z_s^2 + \tau_1^2 + \cdots + \tau_{r-\sigma}^2 \equiv \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_\sigma^2 + t_1^2 + \cdots + t_{r-s}^2 .$$

Hier stehen linker Hand $(r+s-\sigma)$, rechter Hand $(r-s+\sigma)$ Quadrate. Wären diese Zahlen nun nicht einander gleich, so würde eine von beiden, etwa $(r-s+\sigma)$, die kleinere sein, also $s-\sigma > 0$. Die Gleichungen: $\zeta_1 = 0, \ldots, \zeta_\sigma = 0, t_1 = 0, \ldots, t_{r-s} = 0$ legen nun zusammen im R_n der $x_1 \ldots x_n$ eine reelle lineare Mannigfaltigkeit von mindestens $(n-r+s-\sigma)$ Dimensionen fest. Längs dieser Mannigfaltigkeit müßten, da es sich bei unserer Identität um die Quadrate von lauter reellen Größen handelt, auch $z_1 \ldots z_s$, $\tau_1 \ldots \tau_{r-\sigma}$ verschwinden. Also $z_1 \ldots z_s$, $t_1 \ldots t_{r-s}$ (um nur bei diesen zu bleiben) müßten längs einer linearen Mannigfaltigkeit von mindestens $(n-r+s-\sigma)$ Dimensionen Null sein, während sie es doch nur längs einer Mannigfaltigkeit von $(n-r)$ Dimensionen sein sollen! — Man sieht, daß man auf einen Widerspruch kommt, sofern man nicht $s = \sigma$ nimmt; was zu beweisen war.

Gegenüber reellen linearen Substitutionen von nicht verschwindender Determinante zerfallen also die quadratischen Formen von n Veränderlichen in so viele Arten, wie es Zahlenpaare r, s gibt, die den Ungleichungen genügen:

$$1 \leqq r \leqq n, \quad 0 \leqq s \leqq r.$$

So erhalten wir bei $n = 4$ folgende Aufzählung von $\frac{n(n+3)}{2} = 14$ Arten bzw. Normalformen:

Rang $r = 1$: Normalform z_1^2 bzw. $-t_1^2$,

" $r = 2$: " $z_1^2 + z_2^2$, $z_1^2 - t_1^2$, $-t_1^2 - t_2^2$,

" $r = 3$: " $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $z_1^2 + z_2^2 - t_1^2$, $z_1^2 - t_1^2 - t_2^2$, $-t_1^2 - t_2^2 - t_3^2$,

" $r = 4$: " $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$, ... bis hin zu $-t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2$.

Nach dem Vorgange von Gauß (Disquisitiones Arithmeticae Nr 271)[1]) werden wir diejenigen Formen, welche in die Gestalt

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \text{ bzw. } -t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2$$

gesetzt werden können, als *positiv-definite* bzw. *negativ-definite* bezeichnen, weil sie nämlich für reelle Werte von $x_1 \ldots x_4$, die nicht sämtlich verschwinden, nur positive bzw. negative Werte annehmen können. Die Formen niederen Ranges, deren Normalformen nur positive oder nur negative Vorzeichen aufweisen, pflegt man *semidefinit* zu nennen; sie haben, wenn sie nicht Null sind, zwar auch für reelle nichtverschwindende $x_1 \ldots x_4$ bestimmtes Vorzeichen, aber sie können für reelle nichtverschwindende $x_1 \ldots x_4$ eben auch verschwinden. Im übrigen mögen wir die Zahl s der positiven Quadrate allgemein den *Trägheitsindex* nennen.

Bei projektiver Deutung wird diese ganze Einteilung der reellen Formen f etwas verwischt oder, besser gesagt, zusammengeschoben, weil $f = 0$ dieselbe Fläche vorstellt, wie $-f = 0$. Man erhält die Tabelle:

Rang 1. 1 Fall: Doppelebene.

Rang 2. 2 Fälle: imaginäres oder reelles Ebenenpaar.

Rang 3. 2 Fälle: imaginärer bzw. reeller Kegel.

Rang 4. 3 Fälle: imaginäre Fläche, reelle Fläche ohne reelle Geraden, reelle Fläche mit reellen Geraden. —

Die so geschaffene Klassifikation der Formen bzw. Flächen ist zwar sehr schön und nützlich, solange man von dem einzelnen Individuum spricht, über alledem aber schwebt der Kontinuitätsgedanke, der

[1]) Werke Bd. 1, S. 305.

die Koeffizienten a_{ik} selbst als veränderliche Größen betrachtet *. Dann erscheint z. B. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ als Grenzfall von $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \pm \varepsilon z_4^2 = 0$ für $\varepsilon = 0$ und damit als Übergangsfall zwischen den beiden Formenarten

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \quad \text{und} \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2.$$

Auch hiervon werden wir später Gebrauch zu machen haben.

§ 6. Affine Maßbestimmung durch eine quadratische Form.

Will man die Begriffsbildungen der elementaren Maßgeometrie auf den R_n übertragen, so liegt es nahe, die Entfernung eines Punktes (x) von O durch $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, und den Winkel, den zwei von O auslaufende Strecken (x), (y) miteinander bilden, durch

$$\arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}$$

zu definieren. So hat es in der Tat auch Graßmann in der 2. Auflage seiner Ausdehnungslehre (1862) gemacht und ebenso selbstverständlich als Analogon zu den elementargeometrischen Drehungen des R_3 um O diejenigen homogenen linearen Substitutionen der x von der Determinante 1 betrachtet, welche $\sum x_i^2$ in sich selbst überführen [1]). Eben hierdurch verwandelt sich seine „lineale" Ausdehnungslehre (von der wir bisher allein sprachen) in seine „vollständige" Ausdehnungslehre. Bei all diesen Festsetzungen handelt es sich nur um das Hinzunehmen einer quadratischen positiv-definiten Form (eben der $\sum x_i^2$) und die Inbetrachtnahme ihrer Invariantentheorie, d. h. der Substitutionen, die die Form ungeändert lassen. Insbesondere ist das Senkrechtstehen zweier Richtungen durch das Verschwinden der Polare: $\Sigma x_i y_i = 0$ gegeben. Die Polarenverwandtschaft (8) aber nimmt folgende einfache Form an:

$$u_i = x_i\,.$$

Für die geometrische Betrachtung ist damit nicht nur jedem Größensystem der (x) ein solches der (u), und umgekehrt, eindeutig zugeordnet, sondern auch jedem Komplex von Determinanten eines Schemas

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

ein Komplex von Determinanten des entsprechenden Schemas

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

1) Statt von „Drehung um O" spricht Graßmann von „zirkulärer Änderung".

Graßmann nannte dies den Übergang von einem Grundgebilde zu seiner „Ergänzung".

Daß man die positiv-definite quadratische Form gleich in der Normalgestalt $\sum x_i^2$ einführt, ist dabei natürlich nichts als die Zugrundelegung eines besonders einfachen („durchaus rechtwinkeligen") Koordinatensystems.

Von dem so gewonnenen Standpunkte aus liegt es nahe, eine Verallgemeinerung der metrischen Geometrie des R_n in der Weise zu suchen, daß wir statt $\sum x_i^2$ irgend eine quadratische Form von nicht verschwindender Determinante, $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, zugrunde legen. Die Determinante soll nicht verschwinden, damit die Polarenverwandtschaft (8)

$$u_i = \sum a_{ik} x_k$$

eindeutig umkehrbar bleibt (Fälle verschwindender Determinante mag man hinterher als Grenzfälle interpretieren). Im übrigen gilt als Winkel zweier von O auslaufender Richtungen

$$\arccos \frac{\Sigma a_{ik} x_i y_k}{\sqrt{\Sigma a_{ik} x_i x_k}\sqrt{\Sigma a_{ik} y_i y_k}},$$

als Drehung um O jede lineare Substitution von der Determinante $+1$ welche $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ in sich überführt, usw.

Dies wäre die allgemeine affine Maßbestimung, bei deren Ausgestaltung man vor allem unterscheiden wird, welcher Vorzeichenkombination $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, aber auch $\pm \Sigma a_{ik} x_i x_k$ im Sinne des Trägheitsgesetzes zugehört. Um ein Beispiel für die hier auftretenden Beziehungen zu geben: Ist $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ nicht gerade eine definite Form, so gibt es reelle Richtungen, die in ihrer Polarebene liegen, und umgekehrt.

Von anderer Seite gesehen, nämlich projektiv im R_{n-1} interpretiert, deckt sich dieser Ansatz mit Cayleys allgemeiner projektiver Maßbestimmung von 1859, die in Bd. 1, Kap. IV ausführlicher besprochen ist. Dabei zeigt sich (wie ich selbst 1871/72 ausführlich nachwies), daß die beiden Arten Nichteuklidischer Geometrie, welche man nach Riemann und Bolyai-Lobatscheffsky zu unterscheiden pflegt, hier eingeschlossen sind und den beiden Fällen entsprechen, wo die quadratische Form f definit ist oder ein abweichendes Vorzeichen enthält.

§ 7. Von den bilinearen Formen mit kogredienten und denjenigen mit kontragredienten Veränderlichen.

Bilinearformen sind Formen, die in zwei Reihen Veränderlicher je linear (und homogen) sind. Dabei ist zu unterscheiden, ob die beiden Reihen kogredient oder kontragredient sind. Wir nennen die Variabelnreihen im ersten Falle (x) bzw. (y), im zweiten (x) bzw. (u) und haben demnach die Form

$$\sum a_{ik} y_i x_k \quad \text{bzw. die andere} \quad \sum \alpha_{ik} u_i x_k$$

an die Spitze zu stellen.

1. Kogrediente Variable.

Wir werden hier zwei Unterfälle unterscheiden (die bei kogredienter Transformation der (x) und (y) in der Tat getrennt nebeneinander stehen), daß nämlich das Schema der Koeffizienten a_{ik} entweder symmetrisch ist $(a_{ik} = a_{ki})$ oder antisymmetrisch* $(a_{ik} = -a_{ki};\ a_{ii} = 0)$. Im letzteren Falle wollen wir der Deutlichkeit halber statt a_{ik} lieber λ_{ik} schreiben.

Die *symmetrische* Bilinearform mit kogredienten Veränderlichen ist nichts anderes als die Polare der quadratischen Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ und also im Vorhergehenden bereits mit erledigt.

Die *antisymmetrischen* oder *alternierenden* Bilinearformen

$$\sum \lambda_{ik} y_i x_k \tag{17}$$

bieten dagegen wesentlich Neues. Sie sind den Mathematikern zuerst vor rund 100 Jahren bei dem sogenannten *Pfaffschen Problem* entgegengetreten[1]), das ich hier, in etwas unhistorischer Fassung, dahin aussprechen will, daß es sich darum handelt, die Differentialausdrücke folgender Art:

$$\Xi_1 d\xi_1 + \Xi_2 d\xi_2 + \cdots + \Xi_n d\xi_n$$

(wo die Ξ Funktionen der ξ sind), zu klassifizieren. Man fand, daß der Ausdruck

$$\sum\sum\left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \Xi_k}{\partial \xi_i}\right) d\xi_i\, \delta\xi_k$$

dabei in den Vordergrund zu stellen ist (unter $d\xi_i$, $\delta\xi_i$ beliebige kleine Änderungen der Variabeln verstanden). Da hatte man also (die $d\xi$, $\delta\xi$ mit unseren (x), (y) parallelisiert) eine antisymmetrische Bilinearform mit kogredienten Veränderlichen, und infolgedessen nennt man die Hauptinvariante, welche bei der (rein algebraischen) Behandlung unserer Bilinearform (17) in Betracht kommt, noch immer ein *Pfaffsches Aggregat* (englisch: *Pfaffian*). Freilich haben erst Jacobi und Cayley in zwei Jugendarbeiten[2]) die algebraischen Eigenschaften dieses Aggregats klar herausgearbeitet.

---

[1]) Abhandlungen der Berliner Akademie 1814—15: Joh. Friedr. Pfaff: Methodus generalis, aequationes Differentiales ...complete integrandi.

[2]) Jacobi, Crelles J. 2 (1827) = Werke, Bd. 4, S. 19. Cayley, Crelles J. 38 (1849) = Werke Bd. 1, S. 410.

Besagte Pfaffsche Aggregate Λ existieren nur bei geradem n. Es sind rationale ganze homogene Funktionen $\frac{n}{2}$-ten Grades der Koeffizienten λ_{ik} unserer Bilinearform, die nach Einführung der Bezeichnung

(18a) $$\Lambda = (1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad \text{für} \quad (i,\ k) = \lambda_{ik}$$

dem rekurrenten Gesetz unterliegen:

(18b) $$(1,\ 2,\ \ldots,\ n) = (1,\ 2)\,(3,\ 4,\ \ldots,\ n) + (1,\ 3)\,(4,\ \ldots,\ n,\ 2) + \cdots + (1, n)\,(2,\ 3,\ \ldots,\ n-1).$$

Dies gibt für $n = 4$

$$\Lambda = \lambda_{12}\,\lambda_{34} + \lambda_{13}\,\lambda_{42} + \lambda_{14}\,\lambda_{23},$$

was uns als Invariante der bezüglichen Form schon von § 2 her wohlbekannt ist. In der Tat schreibt sich unsere Bilinearform (17) allgemein als einfache Summe

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}\,(y_i\,x_k - x_i\,y_k)\,,$$

sie ist also bei $n = 4$ nichts anderes als eine lineare Verbindung der p_{ik}

$$-\sum \lambda_{ik}\,p_{ik}\,,$$

und die λ_{ik} erweisen sich als den p_{ik} kontragredient, womit der Anschluß an die damaligen Entwicklungen gegeben ist.

Die Bedeutung aber, welche der Ausdruck Λ allgemein für unsere Bilinearform besitzt, wird klar, wenn wir $\sum \lambda_{ik}\ y_i$ für $k = 1 \ldots n$ als kontragredient zu den x_k auffassen, also, wie früher in (8) bei der Polare einer quadratischen Form, die Beziehungen schreiben:

(20) $$u_i = \sum \lambda_{ik}\,x_k\,.$$

Die hiermit gegebene „dualistische Verwandtschaft" repräsentiert ein sogenanntes „Nullsystem", indem

$$\sum u_i\,x_i = \sum \lambda_{ik}\,x_i\,x_k = \tfrac{1}{2}\sum(\lambda_{ik} + \lambda_{ki})\,x_i\,x_k$$

indentisch Null ist. Ihre Determinante ist, wie man sagt, schiefsymmetrisch:

(21) $$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & 0 & \ldots & \lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n1} & \ldots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_{ik} = -\lambda_{ki}\,.$$

Sie ist daher für ungerades n notwendig 0; bei geradem n aber erweist sie sich, wie Cayley l. c. bemerkt hat, als Quadrat eben des Pfaffschen Aggregats Λ (mit dessen Hilfe man denn auch die Auflösung der Gleichungen (20) nach den x_k leicht bewerkstelligt).

Ich kann leider auf diese interessante Theorie nicht näher eingehen. Ebenso kann ich über das Kriterium der Äquivalenz unserer Bilinearformen nur historisch berichten. Gemäß der wichtigen Arbeit von Frobenius in Crelles Journal 84 (1878) dürfen wir auch hier von einem Range r sprechen, der aber notwendig eine gerade Zahl ist. Die Formen vom Range r sind alle auf dieselbe Normalform

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + (x_{r-1} y_r - x_r y_{r-1})$$

reduzierbar, also untereinander äquivalent [1]). Sie sind dadurch charakterisiert, daß in der Determinante (21) alle Unterdeterminanten von höherem als r-tem Grade verschwinden.

2. Kontragrediente Variable.

Die Theorie der Bilinearformen mit kontragredienten Veränderlichen

$$\sum \alpha_{ik} u_i x_k \tag{22}$$

verläuft nach ganz anderen Linien. Bemerken wir gleich, daß an Stelle von (20) jetzt die Formeln treten

$$x' = \sum \alpha_{ik} x_k, \tag{23}$$

also die Formeln einer linearen Substitution schlechtweg. Wir können abkürzend schreiben:

$$x' = A(x).$$

Übt man hier auf die (x'), (x) — ihrer kogredienten Natur entsprechend — simultan irgendeine weitere lineare Substitution S aus, so bekommt man

$$S(x') = AS(x) \quad \text{oder} \quad x' = S^{-1}AS(x).$$

Alle solche lineare Substitutionen gelten für unsere Betrachtung also als gleichberechtigt, die sich aus irgend einer A vermöge dieses Ansatzes ergeben.

Was nun die Invarianten von (22) angeht, so bemerke man, daß neben (22) von vorneherein immer die triviale Bilinarform u_x als gegeben angesehen werden muß. Wir betrachten daher die Formenschar

$$\sum \alpha_{ik} u_i x_k + \lambda \sum u_k x_k,$$

und bekommen als deren Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}+\lambda \end{vmatrix} \tag{24}$$

[1]) Eine einfache Reduktionsmethode gibt E. Cartan: Leçons sur les invariants integraux (Paris, 1922), S. 53. (H.)

(die man neuerdings meist abkürzend

$$|\alpha_{ik} + \lambda\delta_{ik}|$$

schreibt, indem man ein für allemal mit Kronecker verabredet, daß $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ sein soll).

Nach Potenzen von λ entwickelt sei diese Determinante:

$$\lambda^n + \Delta_1\lambda^{n-1} + \Delta_2\lambda^{n-2} + \cdots + \Delta_n. \tag{25}$$

Dann erweisen sich die $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ als Invarianten von (22), *die zugleich ausreichen, um die Form* (22) *gegenüber linearen Substitutionen im allgemeinen zu charakterisieren.*

Aber das Wort „im allgemeinen" meint hier, daß im Speziellen noch Ergänzungen hinzukommen müssen. Diese greifen nur Platz, wenn das Polynom (25) als Funktion von λ mehrfache Linearfaktoren $(\lambda - \lambda_i)$ besitzt. Es ist dann möglich, daß derselbe Teiler $(\lambda - \lambda_i)$ mit einer gewissen Multiplizität auch noch in sämtlichen ersten Unterdeterminanten von (24) steckt, vielleicht auch noch in sämtlichen zweiten usw. Umgekehrt hat das Vorhandensein eines gemeinsamen Faktors aller Unterdeterminanten ersten Grades, oder zweiten Grades, ..., jedenfalls zur Folge, daß dieser Faktor auch in (25) steckt. Über die Gesamtheit der hier vorliegenden Möglichkeiten, durch deren einzelne dann in jedem Falle die gegebene Bilinearform gegenüber beliebiger Substitution charakterisiert ist, gibt die sogenannte Theorie der *Elementarteiler* Aufschluß, die von *Sylvester* 1851 begonnen[1]), von *Weierstraß* 1868 vollendet[2]), schließlich von *Frobenius* 1879 in rationale Form gesetzt wurde (so daß man nicht mehr die einzelnen Linearfaktoren von (25) zu bestimmen braucht)[3]). Näheres in den Lehrbüchern, z. B. bei Bôcher[4]). Es ist eine besonders wichtige Theorie, weil sie eine in den verschiedensten Formen auftretende Fragestellung der Analysis endgültig erledigt.

Die Betrachtung der Determinante (24), bzw. der durch deren Nullsetzen entstehenden Gleichung wird gewöhnlich an die Nebeneinanderstellung eines Paares quadratischer Formen:

$$\sum \alpha_{ik} x_i x_k \quad \text{und} \quad \sum x_i^2$$

angeknüpft. So geschieht es z. B. in der Geometrie, wenn man die Hauptachsen eines Kegelschnitts oder einer Fläche zweiten Grades sucht, oder in der Himmels-Mechanik bei der Berechnung der säkularen Störungen, welche die Bahnen der verschiedenen Planeten aufeinander ausüben. Diese astronomische Fragestellung ist sogar historisch

---

[1]) Phil. Magazine (4), 1 = Werke Bd. 1, S. 219ff.

[2]) Berliner Monatsberichte 1868 = Werke Bd. 2, S. 19ff.

[3]) Crelles Journal 86 (Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten).

[4]) Eine klare Darstellung der Leitgedanken findet man in *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie (Berlin 1926), S. 379ff. (H.)

die Quelle der ganzen Theorie; sie geht bis auf Lagrange und Laplace zurück; ihretwegen nennt man die betreffende Gleichung auch in rein mathematischen Untersuchungen meist die *Säkulärgleichung*[1]). — Der Zusammenhang aller dieser Ansätze mit unserer Darstellung besteht darin, daß mit der quadratischen Form $\sum x_i^2$ die dualistische Transformation $x_i = u_i$ gegeben ist, und daß durch diese aus der anderen quadratischen Form $\sum \alpha_{ik}\, x_i\, x_k$ bzw. deren Polare $\sum \alpha_{ik}\, x_i\, y_k$ die Bilinearform $\sum \alpha_{ik}\, u_i\, y_k$ hervorgeht, die wir an die Spitze der Betrachtung stellten. Es liegt dabei nur insofern eine Spezialisierung vor, als $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ist, was bei uns nicht vorausgesetzt wurde. Man hat dann das Theorem, daß bei reellen α_{ik} die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle reell und die Elementarteiler einfach sind.

Es ist leider unmöglich, den so weit berührten interessanten Fragenkomplex hier weiter zu verfolgen.

B. Freiere Erfassung der linearen Invariantentheorie, mit Einordnung der Vektoranalysis[2]).

§ 1. Vom Erlanger Programm.

Die Entwicklungen des Abschnitts A geben vom Inhalte und namentlich auch von den Methoden der allgemeinen linearen Invariantentheorie selbstverständlich nur einen sehr unvollkommenen Begriff. Inhaltlich haben wir uns auf das Notwendigste beschränkt, was wir im späteren Verlauf der Darstellung gebrauchen. In methodischer Hinsicht aber haben wir uns mit der bloßen Anführung von Beispielen begnügt. Es war unmöglich, auseinanderzusetzen, wie man sich bei einer vorgelegten Funktion überzeugt, ob sie invariant ist, — daß man alle Invarianten, die in den Komponenten der in Betracht kommenden Komplexe einen bestimmten Grad nicht übersteigen, vermöge einer geeigneten Symbolik gleich hinschreiben kann — daß man Methoden hat, um alle zwischen den Invarianten bestehende Identitäten anzugeben, insbesondere aber in jedem Einzelfalle ein kleinstes Invariantensystem abzugrenzen, durch dessen Formen sich alle anderen Invarianten rational und ganz ausdrücken lassen.

---

[1]) Vgl. z. B. Tissérand: Traité de Mécanique céleste, Bd. 1, Kapp. 26, 27. Die Säkulargleichung ist, wenn man sich auf die 8 Hauptplaneten beschränkt, eine numerisch vorliegende Gleichung 8. Grades. Sieht man vom Neptun ab, so ist es eine Gleichung 7. Grades, mit deren zweckmäßiger Auflösung sich noch Jacobi (Crelles Journal 30, 1845 = Werke Bd. 7, S. 97 ff.) ausführlich beschäftigt hat. Es ist die bedauerliche Folge der immer breiter werdenden Ausdehnung unserer Wissenschaft, daß so viele jüngere Mathematiker diese Dinge nur noch vom Hörensagen oder auch gar nicht mehr kennen.

[2]) Der Kleinsche Text ist in diesem Abschnitt vom Herausgeber teilweise geändert und gekürzt. Vgl. Anmerkung 10 am Schluß des Kapitels. (H.)

Diese Andeutungen mögen zeigen, daß es sich um eine weitentwikkelte, geschlossene Disziplin handelt, deren Beherrschung gegenüber vielen in der Mathematik sich darbietenden Problemen wirkliche Macht verleiht und deren Kenntnis daher keinem Mathematiker völlig verschlossen bleiben sollte. Inzwischen bedarf es, um die volle Tragweite der Theorie zu erreichen, noch einer Verbreiterung der ursprünglichen Grundlage, wie ich sie zuerst Juni 1872 in meinem zweiten Aufsatz über die Nichteuklidische Geometrie skizziert und bald darauf, Oktober 1872, in meinem Erlanger Antrittsprogramm[1]) dargestellt habe. Die dort entwickelte Auffassung ist nicht nur die Grundlage für meine eigenen späteren Arbeiten geblieben, sondern namentlich auch von Sophus Lie, mit dem ich damals zusammenarbeitete, aufgenommen und im Kreise seiner Schüler verbreitet worden, so daß sie allmählich Gemeingut ausgedehnter mathematischer Kreise geworden ist. Ich muß hier genauer darauf eingehen, weil in der Tat die verschiedenen Entwicklungen der Physiker, von denen ich weiter zu berichten habe, als Einzelausführungen der dort formulierten allgemeinen Fragestellung angesehen werden können.

Das Prinzip ist kurz anzugeben. Wir begannen in A damit, die Urvariablen einer beliebigen homogenen linearen Transformation von der Determinante 1 zu unterwerfen. Die jetzt vorzunehmende Verallgemeinerung liegt darin, daß wir die Gesamtheit dieser Transformationen unter den Gruppenbegriff fassen. So ergibt sich eine Problemstellung, die ich auf S. 7 des Programms in die Worte kleidete:

„Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden."

Einige Zeilen weiter wird statt dessen gesagt:

„Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie."

Schreibt man statt dessen:

„die Theorie der Beziehungen, welche *relativ zur Gruppe* invariant sind,"

so ist nur noch ein Schritt bis zu dem Worte *Relativitätstheorie*, welches die modernen Physiker für die in ihren Bereich gehörigen Fälle der allgemeinen Zielsetzung gebrauchen.

Das Erlanger Programm gehört zu denjenigen Schriften, welche zu Neuem anregen wollen, indem sie Vorhandenes ordnen. Ich habe es

[1]) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen, ausgegeben Dez. 1872, also vor der genannten Abhandlung, die infolge eines großen Setzerstreikes erst 1873 in Math. Ann. Bd. 6 herauskam. Das Erlanger Programm ist später in Bd. 43 der Math. Ann. (1893), Klein: Ges. Abh. Bd. 1, S. 460 und sonst mehrfach abgedruckt bzw. übersetzt worden.

also immer sehr begrüßt, wenn weitere Ausführungen hinzugetreten sind. Neben der Entwicklung der Lehre von den diskontinuierlichen Gruppen sei hier als wichtigster Fortschritt die allgemeine Theorie der kontinuierlichen Gruppen genannt, welche Lie nach 1872 geschaffen hat, dann aber auch die explizite algebraische Behandlung einzelner linearer Gruppen durch verschiedene jüngere Mathematiker. Ich habe im Jahre 1892—93 in meiner autographierten „Einleitung in die höhere Geometrie"[1]), so gut das im Rahmen einer Jahresvorlesung gelingen wollte, eine Übersicht über den damals vorliegenden Gesamtstoff gegeben. Manches weitere findet man im 3. Bande der Math. Enzyklopädie (III AB, 4b) in Fanos Artikel: „Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip". (1907.)

Trotzdem glaube ich, daß das Erlanger Programm als ein Einschnitt in der Entwicklung speziell der Geometrie oder, um den allgemeinen Graßmannschen Ausdruck anzuwenden, der Ausdehnungslehre angesehen werden kann. Indem an Stelle der engherzigen Auffassung, in der ich aufgewachsen war: daß eigentlich nur die projektive Behandlung geometrischer Fragen als wissenschaftlich angesehen werden könne, eine liberalere Doktrin gesetzt wurde, trat an die Stelle der projektiven Geometrie der Gedanke einer mannigfach abgestuften Transformationsgeometrie. Kein Wunder, daß das Programm bei den Vertretern der früheren Auffassung zunächst vielfachen Widerspruch fand. Ich war namentlich begierig, wie mein verehrter Lehrer Clebsch sich stellen würde. Aber hier griff ein außerordentliches Schicksal ein, indem Clebsch, als mein Programm eben im Druck war, erst 39 Jahre alt, plötzlich einem Diphteritisanfall erlag (am 7. Nov. 1872). Dieser Umstand hat damals für meine wissenschaftliche Arbeit nach den verschiedensten Richtungen neue erschwerende Bedingungen geschaffen, worauf ich vielleicht einmal bei anderer Gelegenheit eingehen werde.

§ 2. Besondere Inbetrachtnahme des dreidimensionalen Raumes.

Übergang zur homogenen orthogonalen Gruppe.

Von den verschiedenen Möglichkeiten, welche der Ansatz des Erlanger Programms für die Geometrie des R_3 einschließt, wollen wir hier vorab nur die einfachsten Typen *linearer* Substitutionsgruppen nennen. Ich knüpfe einfach an die Formeln Bd. 1, S. 168, an. Indem ich ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit der üblichen Bezeichnung x, y, z zugrunde gelegt dachte, schrieb ich damals der Reihe nach hin:

[1]) Inzwischen als Buch erschienen: F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie. Berlin 1926. (H.)

1. Die Gruppe der „projektiven" Geometrie:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x' &= \frac{\alpha x + \beta y y + \gamma z + \delta}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}\,,\\
y' &= \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}\,,\\
z' &= \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''}{\alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta'''}\,.
\end{aligned}
$$

2. Die Gruppe der affinen Geometrie:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta\,,\\
y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',\\
z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''\,.
\end{aligned}
$$

3. Die Gruppe der metrischen Geometrie:

(3), dieselben Formeln wie (2), nur daß die Substitution

$$
\begin{vmatrix}
\alpha & \beta & \gamma \\
\alpha' & \beta' & \gamma' \\
\alpha'' & \beta'' & \gamma''
\end{vmatrix}
$$

eine „orthogonale" Substitution sein, d. h. $x^2 + y^2 + z^2$ in sich selbst überführen soll.

Um durchweg *homogene* lineare Substitutionen zu haben, kann man sich natürlich, wie zuerst Plücker tat und jetzt in allen Lehrbüchern zu finden ist, des Kunstgriffs bedienen, statt

$$
x,\quad y,\quad z \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{x_1}{x_4},\quad \frac{x_2}{x_4},\quad \frac{x_3}{x_4}
$$

zu setzen und dann Zähler und Nenner zu trennen. Wir wollen hier, indem wir uns auf die Fälle (2), (3) beschränken, das einfachere (völlig triviale) Mittel anwenden, daß wir die in den Substitutionsformeln auftretenden additiven Konstanten weglassen. Wir haben dann statt (2) die affinen Transformationen bei festgehaltenem Koordinatenanfangspunkt

$$
(2')\qquad
\begin{aligned}
x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z\,,\\
y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z\,,\\
z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z\,,
\end{aligned}
$$

desgleichen statt (3) die orthogonalen Transformationen bei festem Koordinatenanfangspunkt, gegeben durch (2′) und die hinzutretende Formel

$$
(3')\qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2\,.
$$

Indem wir solcherweise die Formeln (2), (3) spezialisiert haben, verzichten wir auf die allgemeine Betrachtung der affinen Geometrie (oder der mit ihr solidarischen Statik und Kinematik der starren Körper). Dafür nehmen wir im Falle (2′) an die bisher betrachtete allgemeine lineare Invariantentheorie bei drei Veränderlichen direkten Anschluß[1]), im Falle (3′) aber an das, was wir orthogonale lineare Invariantentheorie (bei drei Veränderlichen) nennen werden.

Zunächst noch eine genauere Angabe, was homogene orthogonale Substitutionen bei n Veränderlichen sind. Wir schreiben etwa zunächst (im Anschluß an A § 1):

$$(4)\qquad x_i = s_{i1}x_1' + \cdots + s_{in}x_n' \qquad \text{mit} \qquad \sum x_i^2 = \sum x_i'^2 .$$

Es ist dann eine sehr bekannte Theorie, die dem Wesen der Sache nach auf Euler und Lagrange zurückgeht, daß zwischen den n^2 Koeffizienten s_{ik} die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen bestehen:

$$(5)\qquad \sum_i s_{ik}^2 = 1, \quad \sum_i s_{ik}s_{il} = 0, \quad (k \neq l) \ (k = 1, \ldots, n), \quad (l = 2, \ldots, n),$$

daß dementsprechend die Gruppe der homogenen orthogonalen Substitutionen (4) $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter enthält — daß ferner die Auflösungen von (4) so lauten:

$$(6)\qquad x_k' = s_{1k}x_1 + \cdots + s_{nk}x_n ,$$

so daß man statt (5) auch die Gleichungen (7) schreiben kann:

$$(7)\qquad \sum_k s_{ik}^2 = 1, \quad \sum_k s_{ik}s_{jk} = 0, \quad (i \neq j) \ (i = 1, \ldots, n), \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Man betrachtet ferner insonderheit die Substitutionsdeterminante

$$(8)\qquad r = | s_{ik} | .$$

Indem man sie nach dem folgenden Schema mit sich selbst multipliziert:

$$\begin{vmatrix} s_{11} \ldots s_{1n} \\ \\ s_{n1} \ldots s_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_{11} \ldots s_{n1} \\ \\ s_{1n} \ldots s_{nn} \end{vmatrix}$$

folgt, daß $r^2 = 1$ ist. Mehr aber ist aus den Gleichungen (5) oder (7) nicht zu schließen. Es kann also $r = +1$ oder $r = -1$ sein, und man wird dementsprechend zwischen *eigentlichen* und *uneigentlichen* orthogonalen Substitutionen unterscheiden. Da sich bei der Zusammensetzung zweier linearer Substitutionen ihre Determinanten multiplizieren, folgt, daß nur die eigentlichen Substitutionen für sich genommen eine Gruppe bilden, die sich dann als *kontinuierliche* $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ erweist[2]). — Die eigentlichen und uneigentlichen Substitutionen zusammen bilden dagegen eine sogenannte *gemischte* Gruppe (der-

[1]) Wobei die Determinante der Substitutionskoeffizienten aber zuvörderst noch nicht notwendig gleich 1 ist, wie wir oben, S. 3, der Einfachheit halber voraussetzten.

[2]) G_k bezeichnet im folgenden eine kontinuierliche Gruppe von k Parametern.

selben Parameterzahl). In der Tat enthalten die uneigentlichen Substitutionen keine sog. unendlich kleine Substitution (die „unendlich wenig" von der „Identität" verschieden ist). Das einfachste Beispiel einer uneigentlichen Substitution hat man, wenn man nur eine der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ im Vorzeichen ändert. Geometrisch bedeuten die eigentlichen Substitutionen „Drehungen" um O, die uneigentlichen die anderen Transformationen, welche Study allgemein „Umlegungen" nennt (Math. Ann. 39).

Es ist nun eine für alles Folgende grundlegende Frage, ob wir bei der Invariantentheorie der orthogonalen Substitutionen nur eigentliche oder auch uneigentliche Substitutionen in Betracht ziehen wollen. Das Erstere ist das Bequemere (wie wir ja auch bei den Erläuterungen über allgemeine lineare Invariantentheorie der Kürze halber immer $r = 1$ genommen haben). Das Zweite aber gibt gewisse feinere Unterscheidungen, welche sich auch in der modernen Physik bei genauerer Arbeit als wesentlich erwiesen haben, z. B. die Unterscheidung von Vektoren erster und zweiter Art; wir werden uns darauf beschränken, bei Gelegenheit darauf hinzuweisen.

§ 3. Einschaltung über Quaternionen.

Hamiltons Quaternionenrechnung wurde schon in Bd. 1, Kap. IV, näher erörtert. Ich möchte aber hier, um später darauf zurückgreifen zu können, noch angeben, wie sich mit Hilfe der Quaternionenmultiplikation die orthogonalen Substitutionen der Determinante $+1$ bei drei und vier Veränderlichen in einfachster Weise darstellen.

Ich erinnere kurz: Quaternionen sind viergliedrige komplexe Zahlen

$$q = d + ia + jb + kc\,,$$

für deren Multiplikation das Schema gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} jk = i, & ki = j, & ij = k \\ kj = -i, & ik = -j, & ji = -k \end{array}\right| \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1\,.$$

Die Gleichung

$$t' + ix' + jy' + kz' = q\,(t + ix + jy + kz)$$

ist danach mit der linearen Substitution gleichbedeutend:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} t' &= dt - ax - by - cz \\ x' &= at + dx - cy + bz \\ y' &= bt + cx + dy - az \\ z' &= ct - bx + ay + dz\,, \end{aligned}$$

die einer orthogonalen Substitution von der Determinante $+1$ sehr nahe steht, weil erstens, wie man durch Ausrechnung findet:

$$t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)\,(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)$$

wird, zweitens die Determinante den Wert $(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^2$ erhält.

Von hier aus ist nun nur noch ein Schritt zu der merkwürdigen Formel für die allgemeine Darstellung der eigentlichen orthogonalen Substitutionen bei 4 Veränderlichen, welche Cayley in Crelles Journal, Bd. 50 = Werke II, S. 192, 202 gegeben hat:

$$(37) \qquad t' + i x' + j y' + k z' = \frac{q\,(t + i x + j y + k z)\, q'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}\ \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)}},$$

unter $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ irgend eine zweite Quaternion verstanden. Zur allgemeinen Darstellung der eigentlichen orthogonalen Substitutionen von 3 Veränderlichen aber kommt man, wenn man hier q' insbesondere gleich $d - ia - jb - kc$ nimmt. In der Tat wird dann, wie man nachrechnet, $t' = t$, und es bleibt für die Drehungen um einen Punkt:

$$(38) \qquad i x' + j y' + k z' = q\,(i x + j y + k z)\, q^{-1},$$

eine Formel, welche Hamilton und Cayley schon im Jahre 1844 aufgestellt haben.

Daß diese Formeln (37), (38) die richtige Zahl von 6, bzw. 3 unabhängigen Parametern enthalten, zeigt die einfache Abzählung. Nun soll noch Formel (37) aus der Zusammensetzung binärer Matrizes erklärt werden (wozu ebenfalls schon Bd. 1, Kap. IV, S. 196 einiges Einleitende gesagt ist).

Man setze vorübergehend — um eine Verwechselung mit dem i der Quaternionentheorie zu vermeiden — die gewöhnliche $\sqrt{-1}$ gleich ε. Man schreibe ferner

$$d + \varepsilon a = \alpha\,, \quad b + \varepsilon c = \beta\,, \quad -b + \varepsilon c = \gamma\,, \quad d - \varepsilon a = \delta$$

und analog

$$t + \varepsilon x = \xi\,, \quad y + \varepsilon z = \eta\,, \quad -y + \varepsilon z = \zeta\,, \quad t - \varepsilon x = \tau \quad (t' + \varepsilon x' = \xi' \text{ usw.}).$$

Dann lassen sich die Substitutionsformeln (A) folgendermaßen als Zusammensetzung zweier binärer Matrizes schreiben:

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ \zeta' & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,\xi + \beta\,\zeta & \alpha\,\eta + \beta\,\tau \\ \gamma\,\xi + \delta\,\zeta & \gamma\,\eta + \delta\,\tau \end{pmatrix},$$

wobei die Horizontalreihen der ersten Matrix mit den Vertikalreihen der zweiten kombiniert sind. Daß hierbei die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \zeta' & \tau' \end{vmatrix}$$

gleich dem Produkt der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{vmatrix}$$

wird, ist eine unmittelbare Folge des Determinantenmultiplikationssatzes. Genau entsprechend erhält man:

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\xi + \gamma'\eta & \beta'\xi + \delta'\eta \\ \alpha'\zeta + \gamma'\tau & \beta'\zeta + \delta'\tau \end{pmatrix}.$$

Jetzt sind die Elemente, welche in der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix}$$

derselben Horizontalreihe angehören, miteinander linear verbunden. Formel (37) aber schreibt sich so:

$$(37') \quad \begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ \zeta' & \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} : \sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')},$$

und die auf sie bezügliche Behauptung reduziert sich offenbar darauf, daß man die allgemeinste lineare Umsetzung der Matrix $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & \tau \end{pmatrix}$ bei welcher ihre Determinante sich bis auf einen Faktor reproduziert, erhält, indem man einerseits die Elemente ihrer Vertikalreihen, andererseits ihrer Horizontalreihen linear kombiniert. Durch diese Umsetzung wird die Quaternionenmultiplikation und damit die orthogonale Substitution der Determinante $+1$ auf binäre lineare Substitutionen bezogen (wobei man α und δ, sowie β und $-\gamma$ konjugiert imaginär nehmen muß, wenn man reelle Drehungen darstellen will). Die Invariantentheorie der reellen orthogonalen Transformationen bei 3 und 4 Veränderlichen läßt sich unter Berücksichtigung der hiermit angedeuteten Beschränkung auf die allgemeine binäre Invariantentheorie gründen. Dies ist der Gedanke, den Wälsch in seiner „Binäranalyse" zunächst für $n = 3$ systematisch verfolgt hat. Ich verweise auf seine zusammenfassenden Artikel in Bd. 143 und 144 der Comptes Rendus (1906, II; 1907, I). Die Entwicklungen, welche vielfach denjenigen des weiter unten zu nennenden Schoutenschen Buches von 1914[1]) parallellaufen, gehen auf ihrem Gebiete — eben wegen Heranziehung der in der Invariantentheorie entwickelten allgemeinen Hilfsmittel — weiter als dieses. Aber ich fürchte, daß sie nur sehr wenige Leser finden werden, weil sie einerseits mannigfache Vorkenntnisse (auch nach mathematisch-physikalischer Seite) voraussetzen, andererseits der Kürze halber auch wieder von einer besonderen Stenographie der Formeln Gebrauch machen. Man könnte die Untersuchungen auch auf uneigentliche orthogonale Substitutionen ausdehnen, wenn man zu den binären Substitutionen die Vertauschung von ε mit $-\varepsilon$ hinzunehmen wollte. Neuerdings hat sich Wälsch auch

[1]) Siehe S. 45.

mit dem Falle $n = 4$ beschäftigt, dabei aber vorgezogen, sich explizite an den Quaternionenkalkül anzuschließen.

Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen. Auf die geometrische (projektive) Deutung des in (37) enthaltenen algebraischen Resultates (bei der die beiden Scharen geradliniger Erzeugender der Fläche 2. Grades $\xi\tau - \eta\zeta = 0$ nacheinander linear transformiert werden) bin ich u. a. in Bd. 37 der Mathem. Annalen (1890) eingegangen.

Man sieht jedenfalls, wie genau die Quaternionen an die Betrachtung der orthogonalen Substitutionen bei 3 und 4 Veränderlichen angepaßt sind. Überall, wo von diesen Substitutionen die Rede ist, wird darum ihre Verwendung nützlich sein können. Dagegen wird wohl niemand mehr, wie es Hamilton und seine Schüler zeitweise wollten, in ihnen ein Allheilmittel für alle Desiderate der Geometrie erblicken.

§ 4. Übergang zu den Grundbegriffen der Vektor- und Tensoralgebra *.

Unsere Aufgabe soll jetzt nicht sein, eine systematische Invariantentheorie der homogenen orthogonalen Substitutionen zu entwickeln, sondern nur zu erläutern, wie man vom invariantentheoretischen Ansatz aus bei $n = 3$ und $n = 4$ ohne weiteres zu all den Begriffen der Vektoralgebra kommt, die den Physikern geläufig sind[1]).

1. $n = 3$.

Wir bezeichneten den Inbegriff der drei Variablen

(9) $$x, y, z,$$

insofern wir die Gruppe der homogenen affinen Transformationen zugrunde legten, seither als eine von O auslaufende „Strecke". Beschränken wir uns auf die Gruppe der homogenen orthogonalen Substitutionen, so deckt sich dieser Begriff mit dem, was die Physiker in Anlehnung an Hamilton einen (von O auslaufenden) *Vektor* nennen. Wir haben dann, da es sich nur um orthogonale Substitutionen handeln soll, in

(10) $$x^2 + y^2 + z^2$$

das einfachste Beispiel einer zugehörigen Invariante (Zahlgröße); die Physiker sagen, wieder im Anschluß an Hamilton, *Skalar*. Aber auch die Polare von (10)

(11) $$x'x + y'y + z'z$$

---

1) Eine besondere Schwierigkeit liegt dabei in der Verschiedenheit der von den einzelnen Autoren gebrauchten Terminologie und Formelsprache. Indem ich letztere vorläufig ganz beiseite lasse, beziehe ich mich nur auf solche Termini, welche zur Zeit, jedenfalls bei den deutschen Physikern, allgemein verständlich sein dürften.

wird, unter (x, y, z) bzw. (x', y', z') Vektoren verstanden, eine Invariante sein. Wenn die Physiker sie als *inneres* oder als *skalares Produkt* der beiden Vektoren bezeichnen, so liegt das daran, daß Graßmann wie Hamilton ihre Theorien von vornherein mit der Lehre von den mehrgliedrigen komplexen Zahlen verbanden, die bei uns zurücktritt; siehe Bd. I, Kap. IV, S. 173 ff.

Grundlegend für unsere Auffassung ist, daß gemäß der Invarianz von (11) die x', y', z', welche doch zu den x, y, z kogredient sind, auch als ihnen kontragredient aufzufassen sind. *Allemal, wenn es sich um homogene orthogonale Substitutionen eines Größenkomplexes handelt, fällt der Unterschied von Kogredienz und Kontragredienz weg.*

Wir betrachten jetzt die aus verschiedenen Vektoren aufzubauenden Graßmannschen Stufen und beginnen mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \tag{12}$$

Je nachdem wir orthogonale Substitutionen von der Determinante $+1$ oder -1 heranziehen, wird sie ungeändert bleiben oder ihr Vorzeichen wechseln; die Physiker sprechen, wenn sie letzteren Umstand betonen wollen, von einem Skalar zweiter Art oder Pseudoskalar. Indem wir ferner (12) nach den Elementen der ersten Horizontale entwickeln:

$$x\,(y'z'' - z'y'') + y\,(z'x'' - x'z'') + z\,(x'y'' - y'x''),$$

erkennen wir, daß die Größen zweiter Stufe:

$$y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x'', \tag{13}$$

weil zu den x, y, z kontragredient, bei eigentlichen orthogonalen Substitutionen selbst wieder Vektorcharakter haben, bei uneigentlichen aber überdies einen simultanen Zeichenwechsel aufweisen. — Die Physiker sprechen von dem *äußeren* oder *vektoriellen Produkt* der beiden Vektoren x', y', z' und x'', y'', z'' und bezeichnen den Inbegriff seiner drei Komponenten als Vektor zweiter Art oder als „axialen" Vektor im Gegensatz zu dem ursprünglich auftretenden „polaren" (9).

Gehen wir zu quadratischen Formen von Vektorkomponenten über

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + 2\,d\,y\,z + 2\,e\,z\,x + 2\,f\,x\,y. \tag{14}$$

Dem Umstande entsprechend, daß sie bei der Deformation der Kontinua eine Hauptrolle spielen, nennt man nach einem Vorschlag von Voigt das Koeffizientensystem

$$a, b, c, d, e, f \tag{15}$$

einen *Tensor*. — Gegenüber affinen Transformationen werden sich die

Tensoren nach ihrem *Range* und wenn man nur reelle Koeffizientensysteme betrachtet, nach ihrem *Trägheitsindex* unterscheiden; siehe A § 5. Beschränkt man sich auf orthogonale Substitutionen, so tritt neben (14) von selbst die quadratische Form $x^2 + y^2 + z^2$, was zur Betrachtung der „charakteristischen Determinante"

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} a+\lambda & f & e \\ f & b+\lambda & d \\ e & d & c+\lambda \end{vmatrix}$$

Anlaß gibt. Indem wir sie nach Potenzen von λ entwickeln:

$$(16')\qquad \lambda^3 + (a+b+c)\,\lambda^2 + (bc+ca+ab-d^2-e^2-f^2)\,\lambda + \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}$$

haben wir in den drei dabei auftretenden Faktoren von $\lambda^2, \lambda^1, \lambda^0$ die drei fundamentalen orthogonalen Invarianten des Tensors. Aus ihnen setzt sich u. a. die Invariante

$$(17)\qquad (a+b+c)^2 - 2\,(bc+ca+ab-d^2-e^2-f^2) = a^2+b^2+c^2+2d^2 + 2e^2+2f^2$$

zusammen. Indem wir aus den für zwei Tensoren $a, b, c, \ldots$ bzw. $a', b', c', \ldots$ aufgestellten Ausdrücken (17) die Polare bilden

$$(18)\qquad aa' + bb' + cc' + 2\,dd' + 2\,ee' + 2\,ff',$$

erkennen wir, daß die Größen

$$a,\ b,\ c,\ \sqrt{2}\cdot d,\ \sqrt{2}\cdot e,\ \sqrt{2}\cdot f$$

mit sich selbst kontragredient sind. Gemäß (14) sind sie aber auch zu den

$$(18')\qquad x^2,\ y^2,\ z^2,\ \sqrt{2}\cdot yz,\ \sqrt{2}\cdot zx,\ \sqrt{2}\cdot xy$$

kontragredient; wir schließen, daß sie eben diesen Verbindungen der x, y, z auch kogredient sind. Vielleicht würde es sich empfehlen — was übrigens Ansätzen entspricht, die in der allgemeinen Invariantentheorie wohlbekannt sind, — als Tensorkomponenten durchweg die Größen (18) einzuführen.

Mit den quadratischen Formen (14) sind zugleich deren Polaren und damit die symmetrischen bilinearen Formen (bei denen wir jetzt nicht mehr zu unterscheiden haben, ob in ihnen kogrediente oder kontragrediente Variabelreihen auftreten) für uns erledigt. Eine antisymmetrische bilineare Form wird sich so schreiben:

$$(19)\qquad A\,(yz' - y'z) + B\,(zx' - z'x) + C\,(xy' - x'y)\,.$$

Das Koeffizientensystem A, B, C bezeichnet also einen Vektor zweiter Art. Eine allgemeine Bilinearform (die man nicht in einen symmetrischen und antisymmetrischen Bestandteil gespalten hat) ist für uns mit der allgemeinen homogenen affinen Transformation:

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha\ x + \beta\ y + \gamma\ z\,,\\
y' &= \alpha'\ x + \beta'\ y + \gamma'\ z\,,\\
z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z\,,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

gleichbedeutend. Die deutschen Geometer nennen daher neuerdings das System ($\alpha, \ldots, \gamma''$) einen *Affinor*, bei Hamilton tritt die Transformation unter der Bezeichnung „lineare Vektorfunktion" auf (die Komponenten des einen Vektors sind lineare Funktionen der Komponenten des anderen). Eben hierher gehört, was Gibbs „Dyaden" nennt; vgl. S. 47.

2. $n = 4$ (kürzer gefaßt). Die Variablen mögen x_1, x_2, x_3, x_4 genannt werden. Im übrigen seien, nach dem Vorgange von Sommerfeld (Ann. d. Physik [4], Bd. 32, 1910), bei $n = 4$ die für $n = 3$ üblichen Benennungen Skalar, Vektor, Tensor beibehalten und zur Unterscheidung mit einem Zusatzwort, welches die Zahl der Komponenten angibt, versehen.

Ein Wertesystem x_1, x_2, x_3, x_4 (das beliebigen homogenen orthogonalen Substitutionen unterworfen gedacht wird), heiße dementsprechend *Vierervektor*; aus ihm leitet sich als einfachster Skalar

$$\sum x_i^2$$

ab.

Das Koeffizientensystem einer quadratischen Form $\Sigma a_{ik}\, x_i x_k$ (oder auch einer symmetrischen Bilinearform) werde jetzt *Zehnertensor* genannt. Ein Zehnertensor hat vier Hauptinvarianten (Skalare), die man bekommt, indem man die Determinante $|\, a_{ik} + \lambda \delta_{ik}\, |$ — Kroneckersche Bezeichnung — nach Potenzen von λ entwickelt.

Das Koeffizientensystem einer antisymmetrischen Bilinearform $\sum \lambda_{ik}\,(x_i y_k - y_i x_k)$ heiße *Sechsertensor*; es gibt zwei zugehörige einfachste Skalare: $\sum \lambda_{ik}^2$ und

$$\Lambda = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23}\,^{*}.$$

§ 5. Einführung der Vektoranalysis* (Tensoranalysis).

Kehren wir wieder vorläufig zu $n = 3$ zurück. Es gilt, allen unseren bisherigen Entwicklungen einen neuen Begriff von größter Tragweite einzufügen, den *Feldbegriff*.

Wir haben seither die Skalare, Vektoren, Tensoren..., die wir betrachteten, auf den Koordinatenanfangspunkt bezogen (indem wir von homogenen orthogonalen Substitutionen der x, y, z sprachen); es handelt sich jetzt darum, jedem Raumpunkte x_0, y_0, z_0 einen Skalar, oder Vektor, oder Tensor... beizulegen und damit zum

Begriff des *Skalarfeldes*, des *Vektorfeldes*, des *Tensorfeldes*... aufzusteigen. Die Komponenten eines solcherweise dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordneten „Komplexes" werden sich dann bei homogenen orthogonalen Substitutionen der

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0$$

als Komponenten eines Skalars, Vektors... erweisen müssen.

Der Feldbegriff hat sich ganz von selbst dargeboten, seit es eine mathematische Physik gibt. Zunächst explizite vielleicht als Skalarfeld in der Wärmelehre, indem man die Temperatur als Funktion des Ortes auffaßte. Hinterher kann man natürlich bemerken, daß Felder der verschiedensten Art von je in der klassischen Mechanik aufgetreten sind (Potentialfelder, Kraftfelder...). Die Mechanik der Kontinua lieferte dann weitere Beispiele in Fülle. Aber erst in der modernen Lehre vom Elektromagnetismus (welche das räumliche Medium als Träger der elektromagnetischen Erscheinungen betrachtet) hat der Begriff seine klare Ausprägung erfahren: Man findet das Wort „Feld", soviel ich weiß, zuerst in den ausgedehnten Arbeiten von W. Thomson über Magnetismus (1851 im Philophical Magazine = Reprint of Papers on Electricity and Magnetism, S. 473). — Andererseits kann man den Feldbegriff in verallgemeinerter Form in die abstrakte Invariantentheorie einführen, indem man die Komplexe, mit denen man sich beschäftigt, von irgendwelchen Parametern abhängig denkt.

Ich will das Wort „Vektoralgebra" hier in der allgemeinen Weise gebrauchen, daß es die algebraische Lehre von den Skalaren, den Tensoren usw. mitumfaßt. Aus der so verstandenen „Vektoralgebra" wird dann vermöge des Feldbegriffs die „Vektoranalysis" entstehen, indem man Differentiation oder Integration nach den Parametern x_0, y_0, z_0 mit unter die Operationen aufnimmt, denen man die Komponenten der zu betrachtenden Komplexe unterwirft. Der abstrakte Mathematiker würde sagen, daß man neben die algebraischen Invarianten *Differentialinvarianten, Integralinvarianten* setzt. — Übrigens werde ich statt x_0, y_0, z_0 jetzt kurz x, y, z schreiben und dafür die Koordinaten eines dem Punkte x, y, z angehefteten Vektors u, v, w nennen. Ich werde auch (wie es bei Hamilton immer, und meist auch bei Maxwell der Fall ist) nunmehr auf die Unterscheidung von Skalaren, Vektoren usw. der ersten und zweiten Art verzichten, mich also auf die Invariantentheorie der eigentlichen orthogonalen Substitutionen beschränken.

Das einfachste Beispiel für die neu zu betrachtenden Bildungen ist wohl, daß man bei gegebener Ortsfunktion $f(x, y, z)$ die Unabhängigkeit der beiden Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

vom Koordinatensysteme einsieht und damit aus einem ersten Skalarfeld zwei neue ableitet. Der französische Mathematiker Lamé (1795 bis 1870), der diesen Prozeß prinzipiell erfaßte (vgl. seine Leçons sur les Coordonnées Curvilignes, Paris 1859) nannte die beiden Ausdrücke eben wegen ihrer Invarianz *Differentialparameter* der ersten, bzw. der zweiten Ordnung (l. c. S. 6). Aber ihm lag das vektorielle Denken noch fern. Dieses hat in der für uns hier in Betracht kommenden Form zuerst Hamilton ausgebildet (vgl. seine Lectures on quaternions, 1853 sowie Bd. 1, Kap. IV, S. 187). Geschult in den symbolischen Methoden des englischen Analysten, betrachtet er nicht nur

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \tag{22}$$

(also den „Gradienten", wie man mit Maxwell sagt) als Vektor, *sondern geradezu die Symbole selbst:*

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}. \tag{23}$$

Da ist es denn ganz klar, daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \tag{24}$$

aber ebensowohl auch

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{25}$$

Skalare sind, d. h. Operationen, die auf einen anderen Skalar angewandt (mit ihm multipliziert, wie Hamilton sagt) wieder einen Skalar ergeben. Er hätte ebensowohl bemerken können, daß die 6 zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \tag{26}$$

einen Tensor vorstellen, und daß (25) nichts anderes ist, als die lineare Invariante, die jeder Tensor besitzt.

Man sieht, wie die rein formale Auffassung, welche wir vertreten, hier durchschlägt (während die anschauungsmäßige versagt, mit der die Lehrbücher gewöhnlich beginnen):

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ bezeichnen einen Vektor, weil sie sich bei orthogonalen Substitutionen der dx, dy, dz wie die Komponenten eines Vektors verhalten, und dieses wieder ist der Fall, weil

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

mit f zusammen ein Skalar ist. Daß Hamilton bei solchen Betrachtungen von seiner Quaternionenbezeichnung Gebrauch macht und die Komponenten (23) zu einem Symbol

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\text{ [1]} \tag{27}$$

zusammenzieht, kann hier für uns außer Betracht bleiben.

In der Tat hat ja auch Maxwell in seinem Treatise on Electricity and Magnetism (1873), durch welchen in erster Linie die Vektorvorstellungen bei den Physikern verbreitet worden sind, von dem äußeren Formalismus der Quaternionen keinen Gebrauch gemacht. Er hat insbesondere darauf aufmerksam gemacht, daß wenn

$$u,\quad v,\quad w$$

ein gegebenes Vektorfeld ist, der Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{28}$$

ein zugehöriges Skalarfeld definiert, andererseits aber

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{29}$$

ein zugehöriges Vektorfeld ergeben[2]). Es ist dabei interessant, zu verfolgen, wie sich bestimmte Namen für die (28), (29) erst allmählich durchgesetzt haben. An hydrodynamische Vorstellungen anknüpfend nennt Maxwell den Ausdruck (28), negativ genommen, Konvergenz und der heute herrschende Term *Divergenz* [für (28) selbst] entsprang erst aus einem ganz beiläufigen Vorschlag von Clifford auf S. 209/210 seines Buches „Kinematic" (1878). Den Vektor (29) nannte Maxwell ursprünglich *Rotation* (trotzdem er den *doppelten* Betrag der Drehung des Flüssigkeitsteilchens vorstellt); in seinem Treatise heißt er „curl", ein Term, der in seiner englischen Form, stellenweise ins Deutsche übersetzt als „Quirl", auch in die deutsche Lehrbuch-Literatur vielfach eingedrungen ist. Neuerdings ist man aber doch wieder zu „*rot*" zurückgekehrt, was manche nach Clifford „Rotor" aussprechen.

Die Benennung besonderer Vektorfelder, für welche die Ausdrücke (28) oder (29) identisch verschwinden, als *solenoidal* und *lamellar* findet sich schon bei W. Thomson l. c., andere sagen, in Festhaltung des hydrodynamischen Bildes, *quellenfrei* und *wirbelfrei*. Es ist von vorneherein klar, daß der Ausdruck (28) nur bei orthogonalen Substitutionen invariant ist, die Ausdrücke (29) aber bei beliebigen affinen

---

[1]) Dem sog. „Nabla" der Quaternionisten, wegen der Ähnlichkeit des Zeichens ∇ mit einem hebräischen Musikinstrument dieses Namens.

[2]) Beides klar nach unseren früheren Ansätzen, wenn man nur $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ selbst als Vektor gelten lassen will, den man mit u, v, w skalar oder vektoriell multipliziert.

Substitutionen der Determinante $+1$ (weil sie zweigliedrigen Graßmannschen Unterdeterminanten entsprechen). Wir schließen weiter, daß

$$(30)\qquad u\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

eine affine Invariante vorstellt. Es ist natürlich nicht zufällig, daß die (29), (30) gerade auftreten, wenn es sich in der allgemeinen Analysis darum handelt, lineare Differentialausdrücke (Pfaffsche Ausdrücke):

$$(31)\qquad u\,dx+v\,dy+w\,dz$$

nach ihrem Verhalten gegenüber beliebigen Punkttransformationen:

$$x=\varphi(\xi\eta\zeta),\quad y=\psi(\xi\eta\zeta),\quad z=\chi(\xi\eta\zeta)$$

zu klassifizieren[1]). Denn die in dem Skalar (31) auftretenden dx, dy, dz werden ja bei einer solchen Transformation affin substituiert. Nun ist eine der merkwürdigsten Leistungen von Graßmann, daß er in seiner Ausdehnungslehre von 1862 diese Formeln auf beliebiges n übertragen, d. h. die n-gliedrigen Pfaffschen Ausdrücke überhaupt nach ihrem Verhalten bei beliebigen Punkttransformationen klassifiziert hat. Man wird sagen können, daß er damit zugleich das Studium der n-dimensionalen Vektorfelder, soweit affine Eigenschaften in Betracht kommen, auf eine feste Basis gestellt hat.

Um ein Beispiel von Integralinvarianten zu geben, erweitern wir die Darstellung eines beliebigen Vektorfeldes u, v, w durch die Überlagerung eines lamellaren und eines solenoidalen Feldes, welche dem Wesen der Sache nach bereits 1850 von Stokes[2]) gegeben wurde. Man setzt

$$(32)\qquad \begin{aligned} u&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y},\\ v&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z},\\ w&=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}$$

und bedingt außerdem:

$$(32')\qquad \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0\,.$$

---

[1]) Das Verschwinden der Ausdrücke (29) bedeutet bekanntlich, daß (31) ein exaktes Differential df ist, das Verschwinden von (30), daß es sich durch Multiplikation mit einem Faktor in ein solches verwandeln läßt.

[2]) Stokes: Cambridge Trans. 9 = Papers Bd. 2, S. 255ff. — Ich gebe die meisten dieser Zitate nach dem Enzyklopädieartikel IV, 14 von Abraham, wo man auch viele interessante Einzelbemerkungen findet, die ich hier unmöglich reproduzieren kann.

Man findet für das „skalare" Potential f:

$$\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{33}$$

und für das „Vektorpotential" (U, V, W):

$$-\nabla U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad -\nabla V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad -\nabla W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{34}$$

d. h. Differentialgleichungen, die nach bekannten Methoden der Potentialtheorie unter geeigneten Voraussetzungen über das Verhalten der u, v, w im Unendlichen und die Art der sonst bei ihnen auftretenden Singularitäten — durch bestimmte Integrale integriert werden:

$$f(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \quad \text{usw.} \tag{35}$$

§ 6. Die invariantentheoretische Darstellung in der Vektorlehre.

Wenn wir vorstehend die Vektorlehre usw. als eine Art Korollar zur Invariantentheorie der orthogonalen Substitutionsgruppe dargestellt haben (statt sie auf anschaulich-geometrische Betrachtungen ad hoc zu stützen), so dürfen wir nicht verschweigen, daß eine solche Darstellung in der Literatur nur selten hervortritt.

Mir sind in dieser Hinsicht nur wenige Ausnahmen bekannt, von denen ich zwei anführe.

Die eine bezieht sich auf eine auch sonst sehr interessante Abhandlung, welche der hervorragende englische Physiker und Ingenieur Rankine schon 1855/56 in den London Philosophical Transactions, Bd. 146, veröffentlichte[1]). Die Verzerrung, welche die Umgebung irgend einer Stelle eines elastischen Körpers bei unendlich kleinen Verschiebungen u, v, w seiner Punkte erleidet, ist bekanntlich durch die 6 Komponenten

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{36}$$

gegeben. Diesen „Tensor" behandelt nun Rankine, in direkter Bezugnahme auf Sylvesters damals neue, grundlegende Entwicklungen, genau so mit invariantentheoretischen Methoden, wie wir dies heute tun würden.

Ferner nehme ich eine Arbeit von Burkhardt im 43. Bande der Math. Ann. (1893)[2]). Drude hatte kurz vorher in seinen optischen Untersuchungen die Frage gestellt:

[1]) On axes of elasticity and crystalline forms.

[2]) Über Funktionen von Vektorgrößen, welche selbst wieder Vektorgrößen sind.

„Gegeben seien eine beliebige Anzahl von Vektorgrößen, Funktionen der Lage eines oder mehrerer Punkte; man soll auf die allgemeinste Weise Funktionen derselben und ihrer Differentialquotienten nach den Koordinaten bestimmen, welche selbst wieder Vektorgrößen sind," — die Burkhardt zunächst dahin präzisiert, daß es sich nur um rationale ganze Funktionen der gegebenen Vektorkomponenten handeln soll, die in den nach den x, y, z genommenen Differentialquotienten linear sind; worauf er die Frage mit Hilfe methodischer Reihenentwicklungen, wie sie in der linearen Invariantentheorie üblich sind, erledigt. Hierdurch ist eine verbesserte Einsicht in den Aufbau der in der mathematischen Physik der Kontinua auftretenden linearen Differentialgleichungen gewonnen. Es ist also wirklich nützlich, Kenntnisse aus der Invariantentheorie heranzuziehen.

Warum gibt es so wenige derartige Publikationen? Warum insbesondere mußte sich der Anstoß von Rankine, der allgemein auf eine Verbindung der mathematisch-physikalischen Arbeiten seiner Landsleute mit der formal algebraischen abzielte, totlaufen? Wir finden bald hernach in England einen scharfen Gegensatz der beiden Schulen: Die Invariantentheorie mit ihrer projektiven Deutung erschien den Physikern als etwas gänzlich Überflüssiges, wie mich denn der Edinburgher Physiker Tait eines Tages betreffend Cayley fragte: Ist es nicht ein Jammer, daß ein so hervorragender Mann seine Kraft für so völlig nutzlose Fragen einsetzt?

Ich berühre diese mißlichen Verhältnisse um so lieber, als sie in der modernen Mathematik nichts Singuläres sind, sondern in ähnlicher Weise in den verschiedensten Kreisen bei den verschiedensten Anlässen immer wieder hervortreten.

Die Hauptquelle liegt wohl in der großen Ausdehnung, welche die Wissenschaft je länger je mehr genommen hat. Der einzelne Forscher hat nicht mehr die Zeit — oder glaubt sie nicht mehr zu haben — sich eine umfassende mathematische Bildung anzueignen. Er schafft lieber das, was er nötig hat, von Fall zu Fall von sich aus durch besonderen Ansatz und ist dabei mehr, als ihm bewußt ist, von den Traditionen der Schule, innerhalb deren er aufgewachsen ist, innerlich eingeengt. Darüber geht dann leider das Bewußtsein für die Solidarität aller Arten mathematischer Forschung verloren.

Im Falle der Vektoranalysis muß noch in Betracht gezogen werden, daß das in Betracht kommende Gebiet durch die symbolischen Methoden von Hamilton und Graßmann bereits, sozusagen, vorweg besetzt war. Wer einmal an eine bestimmte Art von Formeln gewöhnt ist, entschließt sich nur schwer, das Wesen und die etwaigen Vorteile anderer Schreibweisen durchzudenken und gar zu deren Verbreitung beizutragen. Bei der weiteren Entwicklung der einschlägigen Literatur, die wir im folgenden allerdings nur streifen können, hat sich dies nur zu sehr bestätigt. Infolgedessen erfolgt ein ganz unnötiger Kräfteverbrauch: dieselben Gedankenreihen werden immer wieder auf andere Weise neu konstruiert. Und es entsteht ein Wirrsal, wie wenn ein Fluß, welcher der Schiffahrt die größten Dienste leisten könnte, sich ins Unbegrenzte verästelt.

Eine wesentliche Absicht dieses Buches ist es, den hiermit angedeuteten Mißständen entgegenzuwirken[1]).

§ 7. Von der Entwicklung der Vektorlehre in den verschiedenen Ländern über Maxwells Treatise hinaus.

Die Entwicklung, von der hier die Rede sein soll, läßt sich kurz dahin charakterisieren: daß sich aus den Auffassungsweisen der Physiker und den Graßmannschen Ideen Kombinationen bilden, welche bald mehr von der einen, bald von der anderen Seite beeinflußt scheinen.

Wir haben hier in erster Linie von den Arbeiten von J. W. Gibbs zu berichten, und da sonst in diesem Buch von amerikanischen Mathematikern noch nicht die Rede war, so mögen wir ein wenig weiter ausholen.

Es ist noch keine 50 Jahre her, daß Amerika an der Entwicklung der reinen Mathematik selbständigen Anteil nimmt. Einen ersten Anfang dazu machte 1870 der Astronom Benjamin Peirce (der auch als Lehrer vielfach anregend wirkte), indem er der National Academy in Washington seine „Linear Associative Algebra" vorlegte, in welcher er die verschiedenen Möglichkeiten mehrgliedriger komplexer Zahlen zu umgrenzen sucht. Auch der glänzende Aufschwung der theoretischen Astronomie in Amerika, wie er durch die Namen Newcomb und Hill belegt wird, geht auf seine Lehrtätigkeit zurück. Immerhin blieb Amerika noch lange Jahre ein Land für mathematischen Import, sei es, daß die jungen Mathematiker von dort nach Europa kamen, um bei uns zu lernen, sei es, daß man einzelne Mathematiker von uns dorthin berief. Außerordentlich wirksam war es insbesonders, daß

[1]) Im Zusammenhange hiermit ist die Schrift des Holländers J. A. Schouten (Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis, 1914) zu erwähnen. Indem sich der Verfasser prinzipiell auf die allgemeine Auffassungsweise des Erlanger Programms bezieht, unternimmt er es, den verschiedenen Entwicklungen der Hamiltonianer und Graßmannianer usw. je ihren besonderen Platz anzuweisen. Das ist an sich genau, was hier gewünscht wird, und es ist um so mehr zu begrüßen, als der Verfasser durch genaue Betrachtung auch der Größenverbindungen höheren Grades weit über die von uns hier allein berührten Elemente der Theorie hinausgeht. Leider aber macht er bei der Durchführung nicht von den längst feststehenden Prozessen der linearen Invariantentheorie, sondern von neu eingeführten Multiplikationszeichen ausgiebigen Gebrauch, in einem solchen Maße, daß z. B. ich für mich es unmöglich finde, ihm in die Einzelheiten zu folgen.

1876—1883 Sylvester an der neu entstandenen John Hopkins Universität in Baltimore wirkte. Er hat dort u. a. die erste der führenden mathematischen Zeitschriften Amerikas, das „American Journal of Mathematics" begründet. Nehmen wir als weitere Daten, daß 1891 die New-Yorker Mathematische Gesellschaft entstand, die sich bald zur „American Mathematical Society" erweiterte, daß mit der Weltausstellung 1893 in Chikago u. a. auch ein Mathematischer Kongreß verbunden war[1]), und daß seit 1900 eigene „Transactions" der Mathematischen Gesellschaft erscheinen. In diesen Angaben sehen wir als Ergebnis einer systematischen Aneignung europäischer Wissenschaft eine immer weiter gehende Entwicklung zu mathematischer Selbstständigkeit, vermöge deren sich heute Amerika als gleichberechtigt neben die älteren Kulturnationen stellt.

Aber hiermit sind nur einige der nach außen hervortretenden Momente genannt. J. W. Gibbs, von dem ich hier insbesondere zu erzählen habe, hat sich daneben in stiller Zurückgezogenheit entwickelt. Von 1866—69 hat er in Europa studiert, insbesondere 1868—69 bei Kirchhoff und Helmholtz in Heidelberg. Im übrigen hat er sein ganzes Leben (1839—1903) in seinem Heimatsstaat Connecticut verbracht. Erst 1873 erschienen seine ersten beiden Veröffentlichungen (über die Diagramme der mechanischen Wärmetheorie), denen dann 1876 bzw. 1878 die große Abhandlung „On the Equilibrium of Heterogeneous Substances" folgte, welche eine der Hauptgrundlagen der physikalischen Chemie werden sollte[2]). Über Vektoranalysis hat Gibbs zuerst 1881 bzw. 1884 einen Leitfaden für seine Studenten (an der Universität New-Haven) erscheinen lassen, der später (1901) in erweiterter Form von Wilson als Lehrbuch herausgegeben wurde. Kurz vor seinem Tode hat Gibbs noch sein Werk über Statistische Mechanik (1902) veröffentlicht. Alles, was Gibbs geschrieben hat, ist innerlich ausgereift und in vortrefflicher Ordnung dargestellt. So kann es nicht wundernehmen, daß er sich von vornherein zu der streng gegliederten Logik der Graßmannschen Ausdehnungslehre hingezogen fühlte. Es hat ihn das in vielfache Diskussionen mit den Quaternionisten, in deren Tradition er aufgewachsen war, geführt[3]).

Gibbs' Darstellung der Vektoranalysis, die weithin auf die physikalischen Kreise wirken sollte, läßt in der Tat den Begriff der (4 teiligen) Quaternion ganz beiseite und operiert von vornherein mit dem Vektor (des dreidimensionalen Raumes) als solchem. Er hat dabei der all-

[1]) Die Sammlung der dort vorgelegten Arbeiten enthält noch vorwiegend auswärtige, insbesondere deutsche Namen. Ich selbst hielt damals die Vorträge, welche 1894 unter dem Titel „The Evanston Colloquium" herausgegeben worden sind. Vgl. F. Klein, Ges. Abh. Bd. 2, S. 5.

[2]) Siehe Bd. 1, S. 242.

[3]) Vgl. überall The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, 2 Bde., London 1906.

gemeinen linearen Vektorfunktion Hamiltons, also in unserer Ausdrucksweise der allgemeinen Bilinearform $\sum \alpha_{ik} x_i y_k$ seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Es kann sein, daß eine solche Bilinearform in das Produkt zweier Linearfaktoren zerfällt: $\sum b_i x_i \cdot \sum c_k y_k$. Gibbs bezeichnet sie dann als *Dyade*. Es scheint ihm einfacher, zunächst eine „Dyadenrechnung" zu begründen und die allgemeine Bilinearform, die er daraufhin „Dyadic" nennt, als Summe verschiedener Dyaden zu fassen. Offenbar entspricht der Dyade eine solche Bilinearform, bei der sämtliche Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Ich kann die Sache nicht weiter ausführen.

Mit der Form, welche die Vektoranalysis bei Gibbs genommen hat, stimmen im wesentlichen die Ausführungen von Heaviside in England[1]). Heaviside ist den Physikern als einer der ersten bekannt, welche Maxwells elektromagnetische Theorie auf zahlreiche Einzelprobleme erfolgreich anwandte; u. a. finden sich bei ihm zum ersten Male die nach Maxwell benannten Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes, die Maxwell selbst nur mit Worten umschrieben hatte, explizite hingeschrieben. Von Hause aus Telegrapheningenieur, dann als Privatmann lebend, ist Heaviside nie von des Verstandes Blässe angekränkelt gewesen, sondern hat, wo er Gelegenheit zu haben glaubte, den gesunden Menschenverstand mit Humor hervorgekehrt. So sind denn gerade seine Ausführungen über Vektoranalysis mit den eingestreuten polemischen Erörterungen sehr amüsant zu lesen.

An Heaviside wieder knüpft die erste selbständige Darstellung, welche die Vektorlehre in Deutschland gefunden hat, an. Das ist A. Föppls „Geometrie der Wirbelfelder" (1897), eine Ausführung zu den kürzer gefaßten bez. Darlegungen in desselben Autors „Einleitung in die Maxwellsche Theorie" (1894). Aus diesen beiden Veröffentlichungen ist später die von Abraham bearbeitete zweibändige „Theorie der Elektrizität" entstanden, die jetzt eines der verbreitetsten Lehrbücher dieses Gebietes ist. Zugleich ist die Vektoranalysis in der einen oder anderen Form in fast alle Lehrbücher der mathematischen Physik oder Mechanik eingedrungen. Daneben sind kleinere Kompendien ad hoc in größerer Zahl entstanden; ich nenne hier in alphabetischer Reihenfolge Bucherer, Gauß, Jahnke, Ignatowski, Valentiner[2]). Um-

[1]) Vgl. insbesondere Heaviside, Electromagnetic Theory (1894), Bd. 1, S. 132 bis 305: „Elements of vectorial algebra and analysis".

[2]) Das Buch von Budde: Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum, 1913, hat mehr monographischen Charakter.

fangreicher ist das neu erschienene, für Techniker bestimmte Lehrbuch von Spielrein.

Es kann nicht meine Aufgabe sein, diese einzelnen Darstellungen zu besprechen. Aber hervorgehoben muß werden, daß in ihnen mehr oder minder die Vektorlehre als etwas aufgefaßt wird, was der traditionellen analytischen Geometrie, d. h. der Koordinatengeometrie, entgegengesetzt ist und unabhängig von ihr entwickelt werden muß, vielleicht gar als Grundlage der Koordinatengeometrie zu betrachten ist. Das ist also genau das Gegenteil von der invariantentheoretischen Behandlung der Geometrie, die wir hier vertreten haben und die den Gebrauch der Koordinaten durch das Intermedium der Substitutionsgruppe mit der Beweglichkeit unserer Raumanschauung verbindet. Der Gegensatz, um den es sich handelt, ist in England entstanden, wo der „poor old Cartesian with his axes" in den polemischen Darlegungen eine stehende Rolle spielt[1]).

Wir haben nun noch von den Italienern zu sprechen. Man konnte von vornherein voraussetzen, daß die Graßmannschen Doktrinen, sobald sie erst bekannt geworden waren, bei ihnen eine gute Aufnahme finden mußten, insofern der Sinn für geometrische Darstellungsweise wie für logische Gliederung in Italien beide sehr allgemein verbreitet sind. So veröffentlicht denn schon 1888 Peano in Turin ein beachtenswertes Lehrbuch: „Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, proceduto delle operazioni della logica deduttiva."

Von der „logica deduttiva", welche die aus der Vieldeutigkeit unserer gewöhnlichen Sprache entstehenden Unsicherheiten durch Einführung bestimmter Formelzeichen für die verschiedenen Arten logischer Verknüpfung beseitigen will, werden wir in einem späteren Abschnitt dieser Darstellung zu handeln haben[2]). Hier sei nur bemerkt, daß sich Peano in seinem Buche auf den Raum von 3 Dimensionen beschränkt und den Physikern so weit entgegenkommt, daß er die Bezeichnungen Vektor usw. aufnimmt.

Aus der Peanoschen Schule sind dann insbesondere die beiden heutigen Vorkämpfer der Vektorlehre in Italien hervorgegangen: Burali Forti (in Turin) und Marcolongo (in Neapel). Ihnen verdanken wir an Lehrbüchern u. a. die beiden 1909 erschienenen Werke: die „Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla mechanica è alla fisica matematica" und die „Omografie

[1]) Ursprünglich bei Sir Robert Ball 1887 in seiner amüsanten Rede über die Bedeutung der Schraubentheorie für die Mechanik starrer Körper (British Association, Manchester). Merkwürdig, daß die Herren, welche die Achsen verpönen, trotzdem dem Koordinatenanfangspunkt eine bevorzugte Stellung belassen.

[2]) Klein hat diesen Abschnitt nicht mehr vollenden können. (H.)

vettoriale" (unsere Affinoren). Die beiden Veröffentlichungen sind neuerdings (1912/13) in einer zusammenfassenden französischen Übersetzung als „Analyse vectorielle générale" erschienen[1]).

Erläuterungen zum ersten Kapitel.

1. S. 3: „unimodular" — d. h. mit der Substitutionsdeterminante $|s_{ik}| = 1$. Setzt man nur $|s_{ik}| \neq 0$ voraus, so ist es aus arithmetischen Gründen zweckmäßig, den Invariantenbegriff zu verallgemeinern; man sieht als Invarianten alle Polynome $J(x_1, \ldots, x_n)$ an, die vermöge (1) die Bedingung erfüllen:

$$J(x_1, \ldots, x_n) = J(x'_1, \ldots, x'_n) \cdot |s_{ik}|^p \qquad (p \geqq 0, \text{ ganz}).$$

Nur für $|s_{ik}| = 1$ erhält man also die nächstliegende Invariantendefinition $J(x) = J(x')$. Entsprechend verfährt man bei Kovarianten und Simultaninvarianten. Deutet man die (x), (x') als kartesische Punktkoordinaten im n-dimensionalen Raum und betrachtet (1) als Punkttransformation in ihm, so ist insbesondere jeder Rauminhalt eines n-dimensionalen Quaders als Funktion des Koordinaten seiner Ecken eine Simultaninvariante von (1) (vgl. § 3); er multipliziert sich vermöge (1) mit $|s_{ik}|$, bleibt also nur für $|s_{ik}| = 1$ ungeändert. Daher nennt man die unimodularen Substitutionen auch „inhaltstreue" (vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923).

2. S. 4, Z. 20. Diese Überlegung ist keineswegs ein einmaliger Kunstgriff; vielmehr ist die Methode, Formen n-ten Grades mit n-ten Potenzen von Linearform zu vergleichen, eine der wichtigsten der Theorie; sie führt zum *symbolischen Kalkül* (vgl. Weitzenböck l. c. S. 2). Die Textbehauptung sei deshalb genauer erläutert.

S sei die durch (1) induzierte allgemeine Substitutionsmatrix der a_{ik}.

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{N1} & \ldots & S_{NN} \end{pmatrix} \qquad \left(N = \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

T sei die Substitutionsmatrix der $u_i u_k$, wenn man die (u) kontragredient zu dem (x) substituiert; zu beweisen ist $S = T$.

Zu diesem Zweck beachte man, daß sich die $u_i u_k$ außer nach T jedenfalls auch nach S substituieren; sie sind ja eins der möglichen Systeme a_{ik}. Man hat also $u_i u_k = T(u'_i u'_k) = S(u'_i u'_k)$. Durch Subtraktion erhält man daraus N Gleichungen der Form

$$0 = (S_{l_1} - T_{l_1}) u_1'^2 + (S_{l_2} - T_{l_2}) u'_1 u'_2 + (S_{l_3} - T_{l_3}) u_2'^2 + \cdots + (S_{lN} - T_{lN}) u_N'^2 \qquad (l = 1, \ldots, N)$$

[1]) Inzwischen erschienen: Marcolongo: Relatività. Messina 1923. Vgl. auch Anmerkung 1 zum 3. Kapitel. (H.)

Wäre nicht $S = T$, so gäbe es unter diesen Gleichungen eine, in der nicht alle Koeffizienten der $u_i' u_k'$ verschwinden; das wäre in der Tat eine lineare Beziehung zwischen den $u_i' u_k'$; also eine quadratische Gleichung in den u_i' selbst, im Widerspruch dazu, daß die u_i' unabhängig veränderlich sein sollen.

3. S. 7, Z. 4: Wenn also sechs Zahlen $p_{12}, \ldots, p_{34}$ die Gleichung $P = 0$ erfüllen, so gibt es immer acht Zahlen $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4$, so daß $p_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1$ usw. Beweis siehe Anmerkung 5.

4. S. 10, Z. 4: Ein Verfahren, das sowohl in der Invariantentheorie als insbesondere auch in der Geometrie sehr wirksam ist. Aus der Linearität und Homogenität der Substitutionen, die die Komponenten eines Komplexes erleiden, folgt nämlich:

a) Ein Komplex *verschwindet identisch* (d. h. seine sämtlichen Komponenten sind in jedem Koordinatensystem Null), wenn seine Komponenten in irgendeinem Koordinatensystem Null sind.

b) Addiert man kogrediente Komplexe nach der Regel der Matrizenaddition, so ist die Summe ein den Summanden kogredienter Komplex, man „darf" also Komplexe addieren; analog „darf" man Komplexe mit Konstanten bzw. Invarianten multiplizieren.

Aus a) und b) ergibt sich: Haben zwei kogrediente Komplexe in einem speziellen Koordinatensystem S_0 gleiche Komponenten, so in jedem; denn dann hat die Differenz der beiden Komplexe in S_0 verschwindende Komponenten, also verschwindet sie identisch. Die Komplexe sind gleich.

Wie im Text kommt es daher, um Gleichungen zwischen Komplexen aufzustellen, immer darauf an, ein Koordinatensystem zugrundezulegen, in dem die Komplexkomponenten möglichst einfache Werte haben.

5. S. 10, Z. 15: Hieraus folgt der Beweis der in Anmerkung 3 formulierten Behauptung:

Die p_{ik} stellen eine Gerade dar, wenn sie nicht alle Null sind; die Zahlen $x_1 \ldots x_4$, $y_1 \ldots y_4$ müssen die homogenen Koordinaten zweier Punkte dieser Geraden sein. Diese Punkte müssen sich auf der Geraden noch verschieben lassen; man wird sie zweckmäßig auf zwei Koordinatenebenen wählen. Setzen wir an $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, dann hat man die Gleichungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} p_{12} &= x_1 y_2 & \qquad p_{23} &= -x_3 y_2 \\ p_{13} &= x_1 y_3 & p_{24} &= -x_4 y_2 \\ p_{14} &= x_1 y_4 & p_{34} &= x_3 y_4 - x_4 y_3. \end{aligned}$$

Nehmen wir $p_{12} \neq 0$ an (sonst hätte man andere Koordinatenebenen auszeichnen müssen). Setzen wir $x_1 = 1$, so bestimmen sich die noch freien y_2, y_3, y_4, x_3, x_4 eindeutig und endlich aus den ersten fünf Gleichungen. Die letzte ist wegen $P = 0$ von selbst erfüllt.

Verschwinden alle p_{ik}, so läßt sich die Forderung $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ offenbar bei willkürlichen x_i und mit willkürlichem ν durch $y_i = \nu x_i$ erfüllen.

6. S. 15, Z. 16 v. u.: Nach dem in Anmerkung 4 erklärten Prinzip folgt daraus der Satz für $n = 4$ allgemein, wenn man zeigt, daß die Ausdrücke D', D'', . . . Invarianten sind; dies ist mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes leicht nachzurechnen.

7. S. 15, Z. 5 v. u.: „Zugrundelegung" — d. h. unter Beschränkung auf Substitutionen, die dieses f unverändert lassen.

8. S. 21, Z. 1: „Kontinuitätsgedanke". — Hierauf gründet sich das „Hesse-Kleinsche Übertragungsprinzip". Man deutet die Koeffizienten einer Form bzw. die Komponenten eines Komplexes als Koordinaten in einem neuen Raum, dem „Formenraum". Jeder Punkttransformation des ursprünglichen Raumes entspricht dann eine Punkttransformation des Formenraumes. So erhalten die „induzierten Substitutionen" ein geometrisches Bild. Eine erfolgreiche Anwendung des Verfahrens macht z. B. die Arbeit von P. J. Myrberg: Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variabeln, Acta math. 46, S. 215—336. 1925.

9. S. 23, Z. 9: Die Unterscheidung von symmetrischen und antisymmetrischen Komplexen ist grundlegend. Es zeigt sich, daß die linearen Größen allgemeinster Art sich additiv, und zwar im allgemeinen eindeutig zusammensetzen lassen aus symmetrischen, alternierenden und anderen Komplexen, die durch gewisse allgemeinere Permutationsregeln gekennzeichnet sind; alle diese Regeln sind wirkliche *Eigenschaften der Komplexe*, unabhängig vom Koordinatensystem. Vgl. B. v. d. Waerden: Identitäten der Invariantentheorie. Math. Ann. 95. 1926.

10. S. 27: Klein hatte für den Formalismus geometrischer Darstellung und Rechnung lebhaftes Interesse, und gewisse Polemiken über den Wert der projektiven Geometrie, über das Erlanger Programm, über die vektorielle Schreibweise und ähnliches kehren in seinen Schriften und Vorlesungen mehrfach wieder.

Der Herausgeber glaubt, das meiste hiervon in diesem Buch um so mehr unterdrücken zu dürfen, als die formale Entwicklung der Relativitätstheorie und Differentialgeometrie den Zustand, den Klein vor Augen hatte, überschritten hat.

Fortgelassen ist in diesem Abschnitt der Schlußparagraph des Manuskripts: „§ 8. Moderne Versuche zur Vereinheitlichung der Vektorbezeichnungen." Stark gekürzt sind §§ 1, 2. § 3 folgte ursprünglich auf § 6. Diese Anordnung war wohl nur in der zwangloseren Form der Vorlesung gerechtfertigt, aus der dieses Buch erwachsen ist.

11. S. 35: Zu §§ 4, 5. Seit dem Durchdringen der allgemeinen Relativitätstheorie hat sich der Sprachgebrauch geändert, weil durch sie

der Riccikalkül stärkere Beachtung gefunden hat als vorher; die Begriffe *Vektor, Tensor* usw. bleiben nicht mehr auf die orthogonale Gruppe beschränkt, sondern werden durch den Riccikalkül in die *Differentialgeometrie der allgemeinen Punkttransformationen* eingeführt. Auch die Art, wie in §§ 4, 5 Invarianten, Vektoren und Tensoren berechnet werden, läßt sich vom Riccikalkül her leichter übersehen. Vgl. Anmerkung 1 zum dritten Kapitel.

12. S. 38, Z. 31: Herleitung: λ_{ik} ist kontragredient zu $x_i y_k - y_i x_k = p_{ik}$. Da nach S. 15 Formel (13′) $\sum p_{ik}^2$ invariant ist, *substituieren sich die p_{ik} orthogonal.* Daher ist nach der Schlußweise S. 36 λ_{ik} auch kogredient zu p_{ik}, $\sum \lambda_{ik}^2$ und Λ sind in der Tat Invarianten, und die λ_{ik} substituieren sich orthogonal.

Zweites Kapitel.

Die spezielle Relativitätstheorie in Mechanik und mathematischer Physik.

Es wird sich nunmehr um die Anwendung handeln, welche sich den einfachen im vorigen Kapitel auseinandergesetzten Theorien neuerdings in Mechanik und mathematischer Physik erschlossen hat. Wir werden dabei dem herrschenden Sprachgebrauch der Physiker die Konzession machen, daß wir durchweg nicht mehr von der Invariantentheorie relativ zu einer vorgelegten Gruppe linearer (später auch nichtlinearer) Substitutionen, sondern von der Relativitätstheorie einer Gruppe reden. In der Tat ist, wenn man den Dingen auf den Grund geht, das Wort „Relativitätstheorie" immer mit Rücksicht auf eine vorgelegte Gruppe zu verstehen und es liegt nur an der Ungenauigkeit unserer Sprache, wenn sich daneben, auch bei hervorragenden Autoren, immer wieder gelegentlich die Auffassung geltend macht, als handele es sich schlechtweg darum, Bewegung als etwas „Relatives" aufzufassen.

Ehe wir uns dem Hauptgegenstand dieses Kapitels, der *Relativitätstheorie der Lorentzgruppe*, zuwenden, müssen wir lernen, wie in der klassischen Mechanik (insbesondere der Himmelsmechanik, die man als den Anfang aller mathematischen Physik anzusehen hat), von jeher, d. h. seit ihrer Begründung durch Galilei und Newton, in entsprechender Weise *eine ausgeartete Form der Lorentzgruppe* zur Geltung gekommen ist. Selbstverständlich ursprünglich so, daß man sich dessen nicht bewußt war. Um so reizvoller ist es, gewisse Hauptsätze der Himmelsmechanik nun hinterher entsprechend den uns geläufigen gruppentheoretischen Gesichtspunkten zu ordnen.

A. Die klassische Himmelsmechanik und die Relativitätstheorie der Galilei-Newton-Gruppe.

§ 1. Definition und Bedeutung der Gruppe, von den Differentialgleichungen des n-Körperproblems aus.

Wir wollen hier nicht mit allgemeinen Erörterungen über das Trägheitsgesetz (aufgestellt von Galilei um 1602) oder mit Newtons allgemeiner Gravitation (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687) beginnen, sondern gleich in medias res treten. Die Differentialgleichungen des n-Körperproblems, wie man sie heute in allen Lehrbüchern findet, lauten:

$$\text{I.}\qquad \left|\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^3} \\ \ddot{y}_i &= \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{y_k - y_i}{r_{ik}^3} \\ \ddot{z}_i &= \varkappa^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{z_k - z_i}{r_{ik}^3} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Hier ist $\varkappa^2$ die sogenannte Gravitationskonstante:

$$\varkappa^2 = 6{,}675 \cdot 10^{-8}\ [\mathrm{cm}^2\ \mathrm{gr}^{-1}\ \mathrm{sec}^{-2}].$$

An diese Gleichungen gehen wir sofort mit der Frage heran, bei welchen linearen Substitutionen der Veränderlichen x, y, z, t sie ungeändert bleiben.

Am nächsten liegt es für den Physiker vielleicht, mit sogenannten Dimensionsbetrachtungen zu beginnen. Die Gleichungen I bleiben bei der „Ähnlichkeitstransformation":

$$(1)\qquad x_i' = \lambda^2 x_i, \quad y_i' = \lambda^2 y_i, \quad z_i' = \lambda^2 z_i, \quad t' = \lambda^3 t$$

ungeändert und jedermann sieht, wie diese bei dem sogenannten 3. Keplerschen Gesetze („die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der halben großen Achsen") durchleuchtet. Indessen zeigt sich, daß gerade dieser Ansatz (1) später nicht verallgemeinerungsfähig ist, und so mag er, so bedauerlich das erscheinen mag, weiterhin beiseite bleiben.

Ferner aber bleiben unsere Gleichungen ersichtlich ungeändert:

a) bei einer beliebigen Parallelverschiebung des (x, y, z)-Systems:

$$(2)\qquad x_i' = x_i + \xi_1, \quad y_i' = y_i + \xi_2, \quad z_i' = z_i + \xi_3,$$

b) bei seinen „Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt" oder auch seinen „Umlegungen bei festgehaltenem O“, d. h. bei den orthogonalen Substitutionen:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_i' = \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i \\ y_i' = \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i \\ z_i' = \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i \end{cases}$$

von der Determinante $+1$ oder -1.

c) weiterhin aber bei Substitutionen, welche t enthalten, nämlich bei der trivialen Operation:

$$(4)\qquad t' = \pm t + \xi_4$$

und bei den Substitutionen:

$$(5)\qquad x_i' = x_i + \varepsilon_1 t\,, \quad y_i' = y_i + \varepsilon_2 t\,, \quad z_i' = z_i + \varepsilon_3 t\,,$$

welche eine mit der Zeit gleichförmig fortschreitende Parallelverschiebung des Koordinatensystems der x, y, z bedeuten (während bei den Änderungen (2), (3) die Zeit überhaupt nicht beteiligt ist; unsere Sprache ist wieder zu unbeholfen, um den hier vorliegenden prinzipiellen Gegensatz mit einem kurzen Wort klar zu bezeichnen).

Hier geben die Formeln (2) und (3) (deren jede 3 unabhängige Parameter enthält) zusammen diejenige G_6, welche man neuerdings wohl als *euklidische Gruppe* bezeichnet, d. h. die Gesamtheit der kongruenten Umänderungen des (x, y, z)-Systems. Durch die Operationen (4) und (5) wird sie zu einer G_{10} erweitert, und diese G_{10} ist es, welche man die *Galilei-Newton-Gruppe* nennt. Indem man festhält, daß die

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix bilden sollen, wird sie durch das Formelsystem gegeben sein:

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} x_i' = \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i + \varepsilon_1 t + \xi_1 \\ y_i' = \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i + \varepsilon_2 t + \xi_2 \\ z_i' = \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i + \varepsilon_3 t + \xi_3 \\ t' = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pm\ t\ + \xi_4 \end{cases}$$

Die innere Bedeutung dieser zehngliedrigen Gruppe aber wollen wir gleich in die Worte fassen, daß man aus der klassischen Himmelsmechanik (die in den Gleichungen I ihren reinsten Ausdruck findet), nur solche Eigenschaften des Sonnensystems gewinnen kann, welche *relativ zur Gruppe invariant* sind. Dies ist, was die euklidische Gruppe (2) (3) angeht, kaum je als eine besondere Erkenntnis empfunden worden. Mehr Interesse haben immer die Substitutionen (4) und (5) gefunden. Daß man bei t das Vorzeichen umkehren darf, hat man als „Reversibilität" der Bewegungen bezeichnet: ich darf Vergangenheit und Zukunft vertauschen; denke ich mir in einem Moment alle Geschwindigkeiten umgekehrt, so läuft die Bewegung genau so rückwärts, wie sie vorher vorangeschritten war. An die Substitutionen (5) hat man vielfach die Aussage geknüpft, daß der „Schwerpunkt des Sonnensystems mit unbekannter Geschwindigkeit in unbekannter Richtung gleichförmig fortschreite". Über gleichförmige Translation läßt sich eben infolge der Substitutionen (5) keinerlei absolute Angabe machen.

Ganz anders ist es mit gleichförmiger Rotation. Orthogonale Transformationen wie diese:

$$x' = x \cos\psi + y \sin\psi, \quad y' = -x \cdot \sin\psi + y \cdot \cos\psi,$$

wo ψ mit t proportional wäre, kommen eben in unserer Gruppe nicht vor.

Ich erörtere noch beiläufig einen anderen Punkt. Man bezeichnet die Kraftwirkung der Gravitation gemäß I oft als „Fernwirkung", im Gegensatz zu einer durch das räumliche Medium vermittelten Nahwirkung. Es heißt dies wirklich, die äußere Darstellungsform überschätzen. Schreibe ich etwa (um mich hier kürzer ausdrücken zu können) statt I:

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ usw.},$$

so läßt sich jeder Term der hier auftretenden potentiellen Energie

$$U = -k^2 \sum_{ik} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \tag{6}$$

als „Grundlösung" einer partiellen Differentialgleichung $\Delta = 0$ interpretieren. Indem wir die partielle Differentialgleichung heranziehen, sind wir im Bereich der Nahewirkungstheorien. Nicht ein Wechsel in der logischen Grundlage, sondern in den psychologischen Begleitvorstellungen hat stattgefunden. Das kann für bestimmte Zwecke, z. B. für den Experimentator oder den konstruierenden Techniker sehr förderlich sein, aber im abstrakt mathematischen Sinne ist nichts geändert.

Als wesentlich für die Gleichungen I werden wir vielmehr ansehen, daß in ihnen das t nicht explizite auftritt, daß bei ihnen die Gravitation als „Instantanwirkung", die nur von der augenblicklichen Konstellation des Systems abhängt, nicht als „retardierte Wirkung" erscheint. Das ist ein Gegensatz, auf den wir in der Folge wiederholt zurückkommen werden.

Die Variable t spielt ja auch ersichtlich bei der Galilei-Newton-Gruppe II ihre besondere Rolle. Wir wollen der Anschaulichkeit wegen x, y, z, t als Punktkoordinaten eines vierfach ausgedehnten Raumes interpretieren; in ihm liegt „übereinander geschichtet" die einfach unendliche Schar der dreidimensionalen Räume $t =$ const. Wir wollen ferner die Substitutionen unserer Gruppe nicht mehr als Wechsel des Koordinatensystems im Raum deuten, sondern als Transformationen des Raumes in sich bei festgehaltenem Koordinatensystem. Es ist dann freilich möglich, jeden Punkt x, y, z, t in jeden anderen x', y', z', t' überzuführen, aber die Mannigfaltigkeiten $t =$ const vertauschen sich dabei untereinander nur wie die Blätter eines Buches bei ungeänderter (eventuell auch invertierter) Paginierung. Die Gruppe ist *transitiv*, aber sie ist nicht *primitiv*. Dadurch bekommt die Geometrie unseres Raumes einen besonderen Charakter. Bei allen Transformationen bleibt $(t_1 - t_2)^2$ ungeändert. Ist es insbesondere von Anfang an 0, so bleibt es 0: *der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Punkte ist der Gruppe gegenüber etwas Absolutes.*

Diese einfachen Verhältnisse werden hier selbstverständlich nur besprochen, um auf die davon abweichenden Beziehungen bei der Lorentzgruppe vorzubereiten. Im übrigen hat die Sonderstellung, welche der Variablen t bei der Galilei-Newton-Gruppe zukommt, auf die geschichtliche Entwicklung der Mechanik entschieden hemmend eingewirkt. Trotzdem bereits Lagrange die Mechanik als eine Geometrie von 4 Dimensionen bezeichnete, hat man von dieser Auffassung erst neuerdings wirklichen Gebrauch gemacht. Alle älteren Autoren hatten immer nur die Euklidische Gruppe vor Augen und brachten die Transformationen (4) und (5), obwohl sie sie natürlich kannten, nicht mit ihr in Zusammenhang. So ist es mir selbst gegangen, als ich mein Erlanger Programm schrieb. Ich erinnere mich deutlich, daß ich die Bemerkung von Lagrange nicht etwa übersehen hatte, aber glaubte, sie in mein Gruppenprinzip nicht einordnen zu können[1]). Erst das Hervorkommen der Lorentzgruppe hat die Mathematiker auf eine richtigere Einschätzung der Galilei-Newton-Gruppe geführt. Eine höchst merkwürdige Sache, die wir uns nun noch an einem besonderen Beispiel klarmachen wollen.

§ 2. Von den 10 allgemeinen Integralen des n-Körperproblems der klassischen Mechanik.

In Jacobis Vorlesungen über Dynamik (gehalten 1842—43 in Königsberg, herausgegeben von Clebsch 1866, Werke, Supplementband, Berlin 1884) — auf die ich mich hier beziehe, weil sie das Vorbild der meisten modernen Darstellungen sind, — werden die bekannten

[1]) Ich hatte früher immer, wenn ich mich recht erinnere, von der (an sich gänzlich trivialen) Substitution $t' = t + \xi_4$ abgesehen, wodurch dann für mich der Eindruck entstand, daß es sich im Raume der x, y, z, t um eine nicht-transitive Gruppe handele! Mit dieser ließ sich dann freilich keine eigentliche Geometrie des R_4 machen.

10 allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen I in der Reihenfolge abgeleitet, daß zuerst von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, dann vom Prinzip der lebendigen Kraft, endlich von der Erhaltung der Flächenräume die Rede ist.

Wir haben also zunächst die 3 ersten Schwerpunktsintegrale (die „Impulssätze"), die ich so schreibe

$$\Sigma m_i \dot{x}_i = A_1, \quad \Sigma m_i \dot{y}_i = A_2, \quad \Sigma m_i \dot{z}_i = A_3, \tag{7}$$

aus denen sich durch unmittelbare Integration die 3 zweiten Schwerpunktssätze ableiten:

$$\Sigma m_i x_i = A_1 t + B_1, \quad \Sigma m_i y_i = A_2 t + B_2, \quad \Sigma m_i z_i = A_3 t + B_3. \tag{8}$$

Sodann den Satz von der Erhaltung der Energie:

$$T + U = h \tag{9}$$

$$\left(\text{wo } T = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad \text{und} \quad U = -k^2 \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}\right).$$

Endlich die 3 Flächensätze, die ich ebenfalls ausführlich hinschreibe:

$$\begin{gathered} \Sigma m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_1, \quad \Sigma m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = C_2, \\ \Sigma m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = C_3. \end{gathered} \tag{10}$$

Die Ableitung dieser Sätze geschieht bei Jacobi nur zum Teil in modernem Sinn systematisch, nämlich bei den Gleichungen (7) und (10), bei denen die *infinitesimalen Transformationen* herangezogen werden, welche die euklidische Gruppe enthält. Indem ich mit dem Buchstaben δ immer unendlich kleine Zuwüchse bzw. unendlich kleine Konstante bezeichne, habe ich zunächst die infinitesimalen Verschiebungen

$$\delta x = \delta \xi_1, \quad \delta y = \delta \xi_2, \quad \delta z = \delta \xi_3,$$

sodann die infinitesimalen Drehungen

$$\begin{array}{ll|ll|ll} \delta y = & z \cdot \delta \varphi & \delta z = & x \cdot \delta \chi & \delta x = & y \cdot \delta \psi \\ \delta z = & -y \cdot \delta \varphi & \delta x = & -z \cdot \delta \chi & \delta y = & -x \cdot \delta \psi. \end{array}$$

Diese infinitesimalen Inkremente der Koordinaten trägt nun Jacobi in den Satz für die virtuellen Verrückungen ein, und gewinnt eben dadurch die Gleichungen (7) und (10). Die Gleichungen (8) und (9) werden darauf, was natürlich ganz einfach ist, durch formale Integration gewonnen, wodurch sie aber unverbunden, als isolierte Tatsachen, neben (7) und (10) stehen.

Demgegenüber hat die Betrachtung der Lorentzgruppe den prinzipiell wichtigen Fortschritt ergeben, daß die Energiegleichung (9) den ersten Schwerpunktssätzen angereiht werden muß, die zweiten Schwerpunktssätze (8) aber den Flächensätzen[1]), entsprechend den

[1]) Vgl. die Angabe bei Herglotz, Ann. d. Phys. (4), Bd. 36, 1911, S. 512—513 (Über die Mechanik des deformierbaren Körpers usw.).

infinitesimalen Transformationen, welche die Galilei-Newton-Gruppe über die Euklidische Gruppe hinaus enthält. Und zwar hat man das Integral der lebendigen Kraft mit der infinitesimalen Transformation zu koordinieren

$$\delta t = \delta \xi_4,$$

die zweiten Schwerpunktssätze aber den folgenden drei:

$$\delta x = t \cdot \delta \varepsilon_1, \quad \delta y = t \cdot \delta \varepsilon_2, \quad \delta z = t \cdot \delta \varepsilon_3.$$

In direkter Weise ist dies auf meinen Wunsch neuerdings von Engel durchgeführt worden[1]). Es ist aber leider unmöglich, den Engelschen Ansatz hier zu reproduzieren, weil dazu ein längerer Exkurs über die Lieschen Integrationstheorien solcher Differentialgleichungssysteme, welche eine bestimmte kontinuierliche Gruppe von Transformationen zulassen, notwendig sein würde. Wir müssen uns in der gegenwärtigen Darstellung darauf beschränken: 1. weiter unten nachzuweisen, daß sich die in Rede stehende Auffassung in der Tat ergibt, wenn man die Galilei-Newton-Gruppe als einen Grenzfall der Lorentzgruppe betrachtet, 2. hier nachzuweisen, daß gemäß den Substitutionen (5) in der Tat ein Zusammenhang zwischen den Flächensätzen und den zweiten Schwerpunktssätzen besteht.

Was zunächst die lebendige Kraft angeht, so hat bereits Ignaz Schütz den betreffenden Zusammenhang in einer merkwürdigen Note in den Göttinger Nachrichten von 1897 (die den Titel trägt: Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie) dargelegt. Setzt man in die Formel

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + U = h$$

für x, y, z bzw. $x + \varepsilon_1 t$, $y + \varepsilon_2 t$, $z + \varepsilon_3 t$ und verlangt, daß die neue Summe

$$\frac{1}{2} \sum m_i ((\dot{x}_i + \varepsilon_1)^2 + (\dot{y}_i + \varepsilon_2)^2 + (\dot{z}_i + \varepsilon_3)^2) + U$$

bei beliebigem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ebenfalls konstant sei, so stehen darin von selbst die drei ersten Schwerpunktssätze (Impulssätze):

$$\sum m_i \dot{x}_i = A_1, \quad \ldots, \quad \ldots.$$

Denselben Ansatz machen wir jetzt bei den Flächensätzen:

$$\sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_1 \quad \text{usw.}$$

Wir erhalten dann linker Hand als Zusatzglieder:

$$\varepsilon_3 (\sum m_i y_i - t \sum m_i \dot{y}_i) - \varepsilon_2 (\sum m_i z_i - t \sum m_i \dot{z}_i), \quad \ldots, \quad \ldots.$$

Wir verlangen wieder, daß trotzdem die linken Seiten Konstanten

[1]) Gött. Nachr. 1916, H. 2.

gleich sein sollen (wie auch die ε_1, ε_2, ε_3 gewählt sein mögen). Dies gibt Gleichungen von der Form:

$$\sum m_i x_i = t \sum m_i \dot{x}_i + B_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und wenn wir hier noch für $\Sigma m_i \dot{x}_i$, ... ihre Werte aus den ersten Schwerpunktssätzen eintragen, haben wir die zweiten Schwerpunktssätze, was zu beweisen war.

Der Fortschritt über die Jacobische Darstellung hinaus ist unverkennbar. Man kommt zu der Forderung: Jemand möge nun überhaupt eine systematische Invariantentheorie (Relativitätstheorie) der Galilei-Newton-Gruppe ausarbeiten, wie wir dies für die homogene orthogonale Gruppe gelegentlich der Burkhardtschen Arbeit auseinandersetzten (Kap. I B, § 6). Darin würde eingeschlossen sein, was u. a. Study und Weitzenböck für die Euklidische Gruppe geleistet haben[1]. Niemand wird natürlich erwarten, daß dadurch die praktische Behandlung des n-Körperproblems I irgend geändert werden würde. Aber vielleicht bekäme man einen verbesserten Einblick in die innere Zweckmäßigkeit der elementaren Ansätze betr. Variablenwahl usw., wie man sie dem natürlichen Gefühl folgend von jeher getroffen hat.

B. Die Maxwellsche Elektrodynamik und die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe.

Wie oben unter A werden wir wieder statt sonstiger, weiter ausgreifender Überlegungen ein System einfachster Differentialgleichungen an die Spitze stellen und nach den linearen Substitutionen der vorkommenden Variablen fragen, bei denen es ungeändert bleibt. Überhaupt werden unsere Überlegungen — auch die historischen Exkurse, die wir einflechten — wesentlich mathematischer Art sein und von der Beziehung auf die Physik nur Richtung und Interesse bekommen. Vielleicht, daß die so entstehende in sich geschlossene Darstellung wegen der Einheitlichkeit des Gedankenganges gerade auch für den Physiker Interesse hat.

I. Einleitendes.

§ 1. Die Maxwellschen Gleichungen für den freien Äther.

Von Maxwell selbst ist schon in Bd. 1, Kap. V ausführlich die Rede gewesen und es ist dort insbesondere schon gezeigt worden, daß die

[1]) Study, E.: Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903. — Weitzenböck, R.: Über Bewegungsinvarianten. Wiener Sitzungsberichte 1913ff.

Maxwellschen Gleichungen für den freien Äther — welche Ausgangspunkt und Grundlage für die gesamten Entwicklungen unseres neuen Kapitels sein sollen — in mathematischer Hinsicht mit den Gleichungen übereinstimmen, welche Mac Cullagh 1839 für das von ihm erdachte optische Medium, sofern wir dieses isotrop nehmen, aufgestellt hat. Wir schreiben die Gleichungen hier gleich in der Form hin, die ihnen Heaviside und Hertz erteilt haben.

Heaviside bedient sich der vektoriellen Schreibweise. Die beiden Vektorfelder, deren Träger der Äther ist: der elektrische Vektor E[1]) und der magnetische Vektor H nach Maxwells Bezeichnung[2]), sind dann durch folgende Gleichungen verbunden:

$$\text{a)}\quad \frac{\dot{E}}{c} = \operatorname{curl} H \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{\dot{H}}{c} = -\operatorname{curl} E\,,$$

zu denen, mit ihnen verträglich, noch die beiden Divergenzbedingungen treten

$$\text{a)}\quad \operatorname{div} E = 0 \qquad\qquad \text{b)}\quad \operatorname{div} H = 0\,.$$

Hertz macht von der ausführlichen Schreibweise in Komponenten Gebrauch, woran wir uns hier mit Rücksicht auf die durchzuführenden Einzelrechnungen anschließen. Er benutzt dabei ein Linkskoordinatensystem. X, Y, Z ist der elektrische, L, M, N der magnetische Vektor. Man hat dann die 2 Reihen von jedesmal 4 Gleichungen:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \end{aligned}\right. \qquad \mathrm{II}\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

Die Abhängigkeit aber, die zwischen den vier Gleichungen der einzelnen Reihe besteht, schreibt sich so:

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial(\ )}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\ )}{\partial t}\,.$$

In I und II treten die X, Y, Z und L, M, N, wie man sieht, durchaus koordiniert auf. Dies ist aber nur der Fall, weil wir uns auf die Gleichungen für den freien Äther beschränken. Wir werden von dieser Koordinierung also weiterhin keinen Gebrauch machen.

---

[1]) Electrician.

[2]) Ich zweifle nicht, daß Maxwell bei der Wahl dieser Bezeichnungen die griechischen Buchstaben Epsilon und Eta einander entgegenstellen wollte. Aus dem Eta bzw. dem englischen Etsch ist dann das bei unsern Physikern übliche deutsche $\mathfrak{H}$ geworden.

Wir setzen noch die einfachen Formeln her, die sich aus I und II ergeben, wenn man aus ihnen durch Differentiation den magnetischen oder den elektrischen Vektor eliminiert (vgl. Bd. 1, S. 244). Wir wollen dabei, nach einem auf Cauchy zurückgehenden Vorschlage, den in der Folge immer wieder auftretenden Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\square \tag{2}$$

setzen. Man findet dann für den elektrischen Vektor die aus der traditionellen Optik wohlbekannten Gleichungen

$$\square X=0,\quad \square Y=0,\quad \square Z=0;\quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0, \tag{3}$$

und natürlich ebenso für den magnetischen Vektor:

$$\square L=0,\quad \square M=0,\quad \square N=0;\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Nun aber bringen wir den Gedankengang der bisherigen Betrachtung heran und fragen:

Gibt es lineare Substitutionen der x, y, z, t und der X, Y, Z, L, M, N, bei denen unsere Gleichungssysteme invariant sind?

Die Form des Operators $\square$ gibt einen ersten Ansatz. Nach unseren invariantheoretischen Anschauungen ist $\square$ die forma adjuncta[1]) des folgenden quadratischen Differentialausdruckes:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2. \tag{5}$$

Daher wird jede einzelne Gleichung $\square=0$ für sich erhalten bleiben, wenn man die dx, dy, dz, dt einer sonst beliebigen, homogenen linearen Substitution unterwirft, welche die Gleichung $ds^2=0$ in sich überführt. Da wir von Ähnlichkeitstransformationen auch hier (wie früher bei der Galilei-Newton-Gruppe) absehen wollen, beschränken wir uns auf diejenigen homogenen linearen Substitutionen der dx, dy, dz, dt, welche ds^2 (und also auch $\square$) selbst ungeändert lassen. Es ist eine Gruppe mit 6 Parametern, aus der eine Gruppe mit 10 Parametern wird, wenn wir die entsprechenden linearen Substitutionen der x, y, z, t bilden (wobei 4 additive Konstanten hinzutreten). Dies ist die *Lorentzgruppe*, die uns damit zum ersten Male begegnet.

Die Frage ist aber noch, wie sich die X, Y, Z, L, M, N verhalten sollen, wenn wir die x, y, z, t irgend einer Substitution der Lorentzgruppe unterwerfen. Hätten wir nur mit den Gleichungen

$$\square X=0,\quad \square Y=0,\quad \ldots,\quad \square N=0$$

zu tun, so könnte man die X, Y, Z, L, M, N noch einer beliebigen linearen Substitution ihrerseits unterwerfen, wodurch noch 36 neue

[1]) Vgl. S. 15.

Parameter in unsere Betrachtung hineinkämen. Aber nun gelten noch die Divergenzbedingungen

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0$$

und schließlich die Maxwellschen Gleichungen I und II selbst. Die Folge wird sein, daß die X, Y, Z, L, M, N — abgesehen von einer Ähnlichkeitstransformation, die wir wieder beiseite lassen wollen — entsprechend jeder einzelnen Lorentzsubstitution der x, y, z, t ihrerseits eine ganz bestimmte lineare Umsetzung erfahren müssen. Will man dies durch direkte Umrechnung der Maxwellschen Gleichungen beweisen, so stößt man zunächst auf unübersichtliche Rechnungen. Wir werden aber die Untersuchung im folgenden Paragraphen mit einem Schlage zu Ende führen, indem wir mit Minkowski eine versteckte Symmetrie der Maxwellschen Gleichungen hervorkehren.

§ 2. Die Lorentzgruppe in orthogonaler Form.

Der Kunstgriff, mit dem wir hier beginnen müssen, besteht darin, daß wir für die Zeit t die neue Variable

$$ict = l \tag{6}$$

einführen und dann noch, damit aus den Differentialgleichungen das Imaginäre verschwindet,

$$iX = U, \quad iY = V, \quad iZ = W \tag{7}$$

setzen.

Der Differentialausdruck ds^2 und der Operator $\square$ nehmen dann die einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2+dy^2+dz^2+dl^2 \\ \square &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial l^2}; \end{aligned} \tag{8}$$

die Lorentzgruppe reduziert sich, soweit sie auf die Differentiale dx, dy, dz, dl wirkt, auf deren orthogonale Transformation.

Die Maxwellschen Gleichungen I und II aber schreiben sich bei übersichtlicher Anordnung der Terme so:

$$\mathrm{I}'\left\{\begin{aligned} 0 &= \quad\cdot\quad +\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial l} \\ 0 &= -\frac{\partial N}{\partial x}+\quad\cdot\quad+\frac{\partial L}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial l} \\ 0 &= +\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}+\quad\cdot\quad+\frac{\partial W}{\partial l} \\ 0 &= -\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial z}+\quad\cdot \end{aligned}\right. \qquad \mathrm{II}'\left\{\begin{aligned} 0 &= \quad\cdot\quad +\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial L}{\partial l} \\ 0 &= -\frac{\partial W}{\partial x}+\quad\cdot\quad+\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial M}{\partial l} \\ 0 &= +\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}+\quad\cdot\quad+\frac{\partial N}{\partial l} \\ 0 &= -\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}+\quad\cdot \end{aligned}\right.$$

L, M, N und U, V, W treten jetzt ganz gleichmäßig auf. Zugleich bekommt die Abhängigkeit der 4 Gleichungen I bzw. II voneinander die ganz symmetrische Gestalt:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x}+\frac{\partial(\ )}{\partial y}+\frac{\partial(\ )}{\partial z}+\frac{\partial(\ )}{\partial l}=0\,. \tag{9}$$

Die in I′ bzw. II′ nebeneinander stehenden Terme aber sind so gebaut, wie die Glieder einer schiefsymmetrischen Matrix.

Es wird das alles noch deutlicher werden, wenn wir jetzt zur Unterscheidung der Variablen durch Indizes übergehen. Wir schreiben für die

$$x,\ y,\ z,\ l \longrightarrow x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \tag{10}$$

und für die

$$U,\ V,\ W,\ L,\ M,\ N$$

abwechselnd

$$\lambda_{14},\ \lambda_{24},\ \lambda_{34},\ \lambda_{23},\ \lambda_{31},\ \lambda_{12} \tag{11}$$

bzw.

$$\mu_{23},\ \mu_{31},\ \mu_{12},\ \mu_{14},\ \mu_{24},\ \mu_{34}.$$

Um die wünschenswerte Beweglichkeit der Formeln zu heben, setzen wir ferner fest: $\lambda_{ik}=-\lambda_{ki}$, $\mu_{ik}=-\mu_{ki}$, $\lambda_{ii}=\mu_{ii}=0$. Unsere Gleichungen I′ und II′ schreiben sich dann in den λ_{ik}:

$$\mathrm{I}''\left\{\begin{aligned}0&=\ \cdot\ +\frac{\partial\lambda_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\lambda_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial\lambda_{14}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\lambda_{21}}{\partial x_1}+\ \cdot\ +\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial\lambda_{24}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\lambda_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\lambda_{32}}{\partial x_2}+\ \cdot\ +\frac{\partial\lambda_{34}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\lambda_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial\lambda_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial\lambda_{43}}{\partial x_3}+\ \cdot\end{aligned}\right.\qquad\mathrm{II}''\left\{\begin{aligned}0&=\ \cdot\ +\frac{\partial\lambda_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial\lambda_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\lambda_{43}}{\partial x_1}+\ \cdot\ +\frac{\partial\lambda_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial\lambda_{31}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\lambda_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial\lambda_{41}}{\partial x_2}+\ \cdot\ +\frac{\partial\lambda_{12}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\lambda_{32}}{\partial x_1}+\frac{\partial\lambda_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial\lambda_{21}}{\partial x_3}+\ \cdot\end{aligned}\right.$$

und in den μ_{ik} gerade umgekehrt:

$$\mathrm{I}'''\left\{\begin{aligned}0&=\ \cdot\ +\frac{\partial\mu_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\mu_{43}}{\partial x_1}+\ \cdot\ +\frac{\partial\mu_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\mu_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{41}}{\partial x_2}+\ \cdot\ +\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_3}+\ \cdot\end{aligned}\right.\qquad\mathrm{II}'''\left\{\begin{aligned}0&=\ \cdot\ +\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial\mu_{14}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_1}+\ \cdot\ +\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial\mu_{24}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_2}+\ \cdot\ +\frac{\partial\mu_{34}}{\partial x_4}\\0&=\frac{\partial\mu_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{43}}{\partial x_3}+\ \cdot\end{aligned}\right.$$

Jede dieser Schreibweisen hat ihre Vorteile. Für das nächstfolgende ist es aber am besten, daß wir die I″ und II‴ herausgreifen, die wir schließlich so schreiben können:

$$\sum_k\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial x_k}=0\,,\quad \sum_k\frac{\partial\mu_{ik}}{\partial x_k}=0\qquad\text{für } i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{12}$$

Und nun spricht sich das Theorem, um welches es sich handelt, so aus: Jedes einzelne Quadrupel der hingeschriebenen Gleichungen bleibt matisch kompliziertere *atomistische*. Ihr zufolge besteht die Materie oder die Elektrizität aus sehr kleinen, getrennten Teilchen. Die partiellen Differentialgleichungen der phänomenologischen Physik beschreiben nur das Verhalten dieser Teilchen *im Mittel*, aber es gibt Erscheinungen die Menge, wo die Betrachtungen solcher Mittelwerte nicht ausreicht, wo man vielmehr die Teilchen *einzeln* verfolgen muß.

Von diesen beiden Auffassungen hat im Laufe des 19. Jahrhunderts bald die eine, bald die andere im Vordergrund der Entwicklung gestanden. In der englischen mathematischen Physik ist von Green bis Maxwell die phänomenologische Darstellung die herrschende gewesen. Es ist aber gar kein Zweifel, daß Maxwell im Herzen Atomist war. Ehe er seinen Treatise schrieb, hat er auf alle Weise versucht, einen feinen inneren Mechanismus zu erdenken, welcher das Substrat für die elektromagnetischen Erscheinungen sein möchte, welche wir im großen beobachten. Ich erinnere auch an seine grundlegenden Betrachtungen zur Gastheorie. Wenn sich Maxwell in seinem Treatise doch ausschließlich der phänomenologischen Darstellung bedient, so erblicke ich hierin eine bewußte Resignation.

In der Tat konnte Maxwell mit der atomistischen Auffassung der Elektrizität, wie sie Wilhelm Weber seinerzeit entwickelt hatte, indem er kleinste positive und negative Teilchen instantan aufeinander wirken ließ, nichts anfangen. Denn die Grundauffassung Maxwells ist doch die, daß die elektromagnetische Wirkung Zeit gebraucht, um sich auszubreiten. So benötigt er ein Medium, welches die Wirkung vermittelt: den „Äther".

Nun ist es höchst merkwürdig, daß die weitere Entwicklung der Elektrizitätslehre in der sogenannten Elektronentheorie den Gegensatz von Phänomenologie und Atomismus nicht entschieden, sondern überbrückt hat. Man hat einerseits die atomistischen Träger der elektrischen Ladung, nämlich die negativen Elektronen und die positiven Atomkerne, und andererseits das elektromagnetische Feld im freien Raum, das die Wirkungen der materiellen Träger der Ladungen aufeinander vermittelt.

Das Geschichtliche kann hier nur in großen Umrissen angedeutet werden.

Wie schon in Bd. 1 gelegentlich erwähnt (S. 230), hat unter anderem Helmholtz 1882 in seiner Faraday-Lecture nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Tatsachen der Elektrolyse zur Annahme einer atomistischen Konstitution der Elektrizität zwingen. In dieselbe Richtung wies dann die weitere Untersuchung der bereits 1869 von Hittorf klar konstatierten Erscheinung der Kathodenstrahlen (bei den elektrischen Entladungen in hoch evakuierten Röhren). Die mathematische Entwicklung der Elektronentheorie nahm dann ihren Anfang in England, aber ihr eigentlicher Vorkämpfer wurde je länger je mehr der Holländer H. A. Lorentz, dessen Name mit ihrer Entwicklung dauernd verbunden bleiben wird und insbesondere bei den von uns hier zu gebenden Entwicklungen voransteht. Als besonderes historisches Dokument sei hier die klare Darstellung des Sachverhaltes genannt, welche Wiechert in der Gauß-Weber-Festschrift von 1899 (Teubner) gegeben hat. (Wiechert war hierzu um so mehr berufen, als er die Grundvorstellungen der Elektronentheorie ursprünglich unabhängig von Lorentz (bald nach diesem) aufgefunden und viel zu ihrer Entwicklung beigetragen hat). Zu nennen ist ferner, als Seitenstück dazu, und als Beleg für die Entwicklung, welche die Theorie im Vaterlande Maxwells genommen hat, das Buch von Larmor „Aether and Matter" (Cambridge, 1900).

Allgemein haben sich die Ideen, soviel ich sehen kann, je länger je mehr dahin entwickelt, daß die Träger der elektrischen Ladungen auch die letzten Bausteine der Materie sind. Wie schon erwähnt, hat man einerseits die positiv geladenen Kerne der Atome, in denen der Hauptteil ihrer Masse konzentriert ist, und andererseits die sehr viel leichteren Elektronen[1]), die Elementarteile der negativen Elektrizität. Die Ausdehnung der Kerne und Elektronen ist dabei jedenfalls verschwindend klein gegenüber der Dimension der Atome, d. h. der Abstände zwischen den einzelnen Teilchen, so daß das Bild des Atoms das eines Planetensystems im kleinen ist. Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und Kernen gehorcht aber sicher nicht exakt den Gesetzen der klassischen Elektronentheorie, so daß diese dem Stande der heutigen physikalischen Forschung nicht mehr völlig entspricht[2]). Im großen gibt sie zwar eine sehr gute Beschreibung der elektrischen Erscheinungen, jedoch müssen in atomaren Distanzen grundsätzliche Abweichungen von dem mathematischen Ansatz der durch die Elektronenhypothese erweiterten Maxwellschen Theorie bestehen. Dies soll uns nicht abhalten, bei der folgenden Darstellung an der klassischen Maxwell-Lorentz-Theorie, also an der Grundlage der Maxwellschen Gleichungen, festzuhalten. Später werden wir mit Einstein in bestimmter Richtung weitergehen[3]). Die Auffassung muß doch die sein, daß die verschiedenen physikalischen Theorien immer nur Annäherungen an die Wirklichkeit der Dinge vorstellen, und daß der Mathematiker seine Pflicht tut, wenn er je eine bestimmte Auffassung klar in ihren Konsequenzen verfolgt.

---

[1]) Das Wort „Elektron" wird zum ersten Male von dem irischen Mathematiker Stoney in Vorschlag gebracht (R. Irish Transactions (2). 4. 1891). Es ist offenbar so zu verstehen: Die kleinsten geladenen materiellen Teilchen, die man in der Theorie der Elektrolyse betrachtet, nennt man nach Faraday *Ionen* (d. h. wandernde Teilchen). Dementsprechend wird man die kleinsten, in der modernen Elektrizitätslehre zu betrachtenden Teilchen Elektro-Ionen nennen und hieraus ist dann durch Zusammenziehung das Wort „Elektronen" entstanden.

[2]) Vgl. Anmerkung 2 am Schluß des Kapitels. (H.)

[3]) Das sollte im vierten Kapitel dieses Buches geschehen, das Klein nicht mehr vollendet hat. Vgl. das Vorwort. (H.)

§ 5. Von der mathematischen Bearbeitung der Maxwellschen Theorie bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts.

Maxwells Auffassungen haben bei uns, und überhaupt auf dem Kontinente, lange Zeit hindurch keine rechte Wurzel zu fassen vermocht, weil sie den traditionellen Ansätzen zu sehr zuwider liefen, auch der Treatise kein logisch geschlossenes System vorstellt, sondern von verschiedenen Ansatzpunkten aus induktiv vorgeht. Es ist dann auch die mathematische Bearbeitung der Maxwellschen Theorie jahrelang sozusagen ein Reservat der Engländer geblieben. Von Heaviside haben wir schon wiederholt gesprochen. Neben ihn stellen sich bald Vertreter der Cambridger Schule. Ich nenne neben dem etwas älteren Poynting (geb. 1852) vor allem J. J. Thomson und Larmor (beide 1857 geboren). Von Larmors „Aether and Matter" war ja schon oben die Rede.

Die so geschilderte Sachlage hat sich nun völlig geändert, als es Hertz 1887 gelang, die von Maxwell nur postulierten elektrischen Schwingungen im Dielektrikum experimentell sicherzustellen[1]). Nun setzt allerwärts auch die theoretische Behandlung der Maxwellschen Ideen ein. Hertz selbst war der erste, der bei uns eine geschlossene Darstellung gab[2]). Ihm stellt sich sofort Boltzmann zur Seite, der mit der ganzen Wucht seiner begeisternden Vorträge auch den Unentschlossenen fortriß. (Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes 1891—93.) Die Maxwellschen Gleichungen für den reinen Äther sind ihm, wie Hertz, der in seiner Einfachheit endgültige Ausdruck des physikalischen Geschehens. „War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb?" zitiert er frei nach Goethe. Nun folgen viele andere, die es unmöglich ist, hier aufzuführen. Poincaré von französischer Seite aber müssen wir nennen. Ich habe bereits in Bd. 1, Kap. VIII dieses außerordentlichen Mathematikers ausführlich gedacht und beabsichtige noch in späteren Teilen dieses Vorlesungszyklus[3]) auf die singuläre Stellung zurückzukommen, die er für die neuzeitliche Entwicklung der Mathematik überhaupt besitzt. Hier

---

[1]) Heinrich Hertz, geb. auch wieder 1857, war ein ebenso glänzender Experimentator wie Theoretiker; es ist ein Jammer, daß ein so außerordentliches Talent bereits im Alter von 37 Jahren dahingehen mußte. Man wird es immer als ein besonderes Verdienst von Helmholtz preisen, Hertz auf die richtige Bahn gestellt zu haben. Was Hertz' Entwicklung angeht, vgl. die Einleitung zu Bd. 1 seiner Ges. Werke (verfaßt von Lenard 1895) oder auch das Vorwort, welches Helmholtz selbst dem bereits 1894 erschienenen Schlußbande (der die Mechanik von Hertz enthält) vorausgestellt hat.

[2]) Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, Teil I (für ruhende Körper) in den Gött. Nachr. von 1890, abgedruckt in Ann. d. Phys. u. Chemie N. F., Bd. 40, 1890; Teil II (für bewegte Körper) Bd. 41. 1890.

[3]) Klein hat diese Teile nicht mehr vollendet. (H.)

handelt es sich darum, daß er 1885—1896 den Lehrstuhl der mathematischen Physik an der Universität Paris übernahm und zunächst daran ging, in wechselnden, in Lehrbuchform weit verbreiteten Vorlesungen die Kenntnis der modernen mathematischen Physik zu verbreiten, um deren fernere Entwicklung fortan durch das Schwergewicht seines mathematischen Könnens zu stützen. Es ist schwer zu sagen, was dabei mehr zu bewundern ist: Seine nie versagende Produktivität oder die immer rege Rezeptivität, die ihn alle von physikalischer Seite neu hervorkommenden Ideenbildungen gleich aufnehmen und weitergestalten ließ.

Als Führer aber im Gebiet dieser neuen Ideen bezeichneten wir schon oben den Holländer H. A. Lorentz. Geboren 1853 in Arnheim, ist Lorentz in kleinen Verhältnissen wesentlich durch selbständige Studien in die Höhe gewachsen, immerhin angeregt durch die erfolgreichen molekulartheoretischen Arbeiten von van der Waals (geb. 1837), der als erster den alten Ruhm Hollands als einer Pflanzstätte hervorragender physikalischer Forschung erneuert hatte. 1872 finden wir ihn als Lehrer an einer kleinen Abendschule seiner Vaterstadt, 1875 promoviert er, 1878 wird er Nachfolger von van der Waals auf dem Lehrstuhl für mathematische Physik in Leyden, seit 1912 ist er Kurator der Teylerstiftung in Haarlem, wo er ganz seinen theoretischen Forschungen leben kann. Als er 1900 sein 25jähriges Doktorjubiläum feiern konnte, haben bereits Forscher aller Nationen zu einer inhaltreichen Festschrift beigetragen, die als Band 6 der zweiten Serie der Archives Néerlandaises erschienen ist.

Lorentz geht immer vom konkreten physikalischen Experiment aus, das er molekulartheoretisch zu verstehen sucht. Darum hat seine Mathematik etwas Umständliches, von der Eleganz allgemeiner phänomenologischer Darstellung verschiedenes. Indem er, wo immer kleine Größen auftreten, gleich nach Potenzen entwickelt und mit niederen Gliedern abbricht, ist er lange an der mathematischen Einfachheit der jetzt nach ihm benannten Transformationen vorbeigeführt worden. Um so eindringlicher hat er deren allgemein-physikalische Bedeutung (nicht für die Kräfte elektrischen Ursprungs) zur Geltung gebracht und ist eben dadurch der Vater der hier vertretenen relativistischen Auffassung geworden. Er selbst ging aber zunächst durchaus von einem absoluten, d. h. ruhenden Äther aus, innerhalb dessen sich die Teilchen der gewöhnlichen Materie und die Elektronen herumbewegen. Auf Grund dieser Vorstellung das elektrische bzw. optische Verhalten bewegter Körper zu erklären, war sein ursprünglicher Zielpunkt. Die Ansätze, welche Hertz hierfür geliefert hat, konnten nicht als genügend anerkannt werden.

Die Hauptveröffentlichungen von Lorentz, welche wir in diesem Zusammenhang nennen müssen, sind:

1. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, 1892. Leyden, Bd. 26 der Archives Néerlandaises.

2. Das deutsch geschriebene Buch: Versuch einer Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leyden 1895.

Hierzu vergleiche man noch die beiden großen Enzyklopädieartikel Bd. V, 2. Teil, Nr. 13, 14: Maxwells elektromagnetische Theorie; Weiterbildung der Maxwellschen Theorie: Elektronentheorie.

§ 6. Von dem allmählichen Hervorkommen der Lorentzgruppe.

Es soll sich hier nicht um die experimentellen Entdeckungen und Messungen handeln, welche für die Entwicklung der Ideen maßgebende Bedeutung erlangten — ihretwegen kann auf die weitverbreiteten Darstellungen der Bücher verwiesen werden —, sondern um die Geschichte der mathematischen Formulierungen[1]). Soviel ich sehen kann, läßt sich das Wesentliche vielleicht unter folgende Nummern bringen:

1. Voigt: Über das Dopplersche Prinzip. Göttinger Nachrichten 1887.

Die Maxwellschen Gleichungen werden, der damaligen Zeit entsprechend, noch nicht berücksichtigt, sondern es wird gleich mit den Schwingungsgleichungen begonnen, die wir in unserer Bezeichnung so schreiben:

$$\square X = 0, \ \square Y = 0, \ \square Z = 0, \tag{15}$$

mit der Nebenbedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{15'}$$

Wir haben bereits bemerkt, daß jede einzelne der Gleichungen $\square = 0$ durch ∞^7 lineare Substitutionen der x, y, z, t in sich übergehen, die wir dadurch auf ∞^6 reduzierten, daß wir die Substitutionsdeterminante $= \pm 1$ nahmen (wodurch wir eben erhielten, was wir, vorbehaltlich kleinerer weiterer Einschränkungen, die Lorentzgruppe nannten). Nun hat auch Voigt im Grunde die ∞^7 Substitutionen, er schränkt sie aber dadurch auf ∞^6 ein, daß er die Transformationen des t von vornherein in der Gestalt annimmt:

$$t' = t - (ax + by + cz). \tag{16}$$

Es wird also nur der Anfangspunkt der Zeit abhängig von x, y, z verschoben, nicht aber der Maßstab der Zeit abgeändert (wie dies weiter-

[1]) Ich zitiere dabei aus Jacobis bereits S. 65 berührter Antrittsrede von 1832 noch die Worte, welche ausgezeichnet hierher passen: „Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem; omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae; jam illa, certo temporis momento, divina quadam necessitate coacta, emergit...."

hin für die prinzipielle Auffassung wesentlich ist). — Weiterhin folgen spezielle Fälle, bei denen man die Nebenbedingung (15') und ihre Aufrechterhaltung gegenüber (16) durch geeignete Annahmen betreffend die Abhängigkeit der X, Y, Z von den x, y, z, t befriedigt.

2. Lorentz 1892 (siehe das Zitat am Ende des vorigen Paragraphen). Hier stehen die Maxwellschen Gleichungen als solche voran, neben die Transformation der x, y, z, t tritt die der X, Y, Z, L, M, N. Aber auch hier wird der Ansatz (16) benutzt; daß er als wesentlich angesehen wird, ergibt sich aus der Einführung eines besonderen Terminus für die Zeit t': „Ortszeit". Wie bei Voigt wird der Spezialfall einer bloßen Verschiebung längs der x-Achse bevorzugt. Die exakten Substitutionsformeln für die x, y, z, t heißen dann so:

$$(17)\qquad x' = x - vt, \quad y' = y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad z' = z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad t' = t - \frac{vx}{c^2}$$

(unter v die Geschwindigkeit der Verschiebung, unter c die Lichtgeschwindigkeit verstanden). Aber hier wird nun, wie schon oben angedeutet, die Quadratwurzel durch den Näherungswert $1 - \frac{v^2}{2c^2}$ ersetzt, wodurch man nur noch eine approximative Formel hat.

3. Die spezielle Transformation (17) spielt in der ganzen Literatur betr. die Lorentzgruppe eine solche Rolle, daß wir über sie noch einiges Nähere sagen müssen. Die einfachste Einsicht bietet natürlich die orthogonale Schreibweise, mit $l = ict$. Man setze:

$$(18)\qquad \begin{array}{l} x' = \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot l \\ l' = -\sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot l \end{array} \left| \quad y' = y, \quad z' = z, \right.$$

dann ist, da die U, V, W, L, M, N gemäß früherer Verabredung den Unterdeterminanten des Schemas:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz & dl \\ \delta x & \delta y & \delta z & \delta l \end{vmatrix}$$

kogredient sein sollen:

$$(18')\qquad \begin{gathered} U' = U, \; L' = L \\ V' = \cos\varphi\cdot V + \sin\varphi\cdot N, \quad W' = \cos\varphi\cdot W - \sin\varphi\cdot M, \\ M' = \cos\varphi\cdot M + \sin\varphi\cdot W, \quad N' = \cos\varphi\cdot N - \sin\varphi\cdot V, \end{gathered}$$

Hier wird man für l jetzt ict und für U, V, W bzw. iX, iY, iZ substituieren. Will man dann reelle Substitutionskoeffizienten haben, so muß man, damit $\cos\varphi$ reell bleibt und $i\sin\varphi$ reell wird, $\varphi = iw$ nehmen. Es verwandeln sich dann die trigonometrischen Funktionen in die hyperbolischen Funktionen von w:

$$\cos iw = \mathfrak{Cos}\, w, \quad i\sin iw = \mathfrak{Sin}\, w$$

mit

$$\mathfrak{Cos}^2 w - \mathfrak{Sin}^2 w = 1$$

und die Formeln werden:

$$(19)\qquad \left.\begin{aligned} x' &= \mathfrak{Cos}\, w \cdot x + c\, \mathfrak{Sin}\, w \cdot t \\ t' &= \frac{\mathfrak{Sin}\, w}{c} \cdot x + \mathfrak{Cos}\, w \cdot t \end{aligned}\right| \quad y' = y, \quad z' = z$$

bzw.

$$(19')\qquad \begin{aligned} &X' = X, \quad L' = L, \\ &Y' = \mathfrak{Cos}\, w \cdot Y - \mathfrak{Sin}\, w \cdot N, \quad Z' = \mathfrak{Cos}\, w \cdot Z + \mathfrak{Sin}\, w \cdot M, \\ &M' = \mathfrak{Sin}\, w \cdot Z + \mathfrak{Cos}\, w \cdot M, \quad N' = \mathfrak{Cos}\, w \cdot N - \mathfrak{Sin}\, w \cdot Y. \end{aligned}$$

Nun ist aber bei den Physikern der Gebrauch der hyperbolischen Funktionen nur wenig verbreitet. Man setze also, unter q einen echten Bruch verstanden:

$$\mathfrak{Cos}\, w = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \qquad \mathfrak{Sin}\, w = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Wir bekommen dann:

$$(20)\qquad \left.\begin{aligned} x' &= \frac{x + cqt}{\sqrt{1-q^2}} \\ t' &= \frac{\frac{q \cdot x}{c} + t}{\sqrt{1-q^2}} \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

bzw.

$$(20')\qquad \begin{aligned} &X' = X, && L' = L \\ &Y' = (Y - qN) : \sqrt{1-q^2}, && M' = (M + qZ) : \sqrt{1-q^2}, \\ &Z' = (Z + qM) : \sqrt{1-q^2}, && N' = (N - qY) : \sqrt{1-q^2}. \end{aligned}$$

Und nun unterscheiden sich die (20) von den (17), wenn man $\frac{v}{c} = q$ setzt, nur dadurch, daß sie auf die Determinante $+1$ gebracht sind, während die (20′) die für die Invarianz der Maxwellschen Gleichungen notwendigen Ergänzungsgleichungen geben.

Wir werden die (20), (20′) in der Folge kurzweg die *spezielle Lorentz-Transformation* nennen.

4. Allerdings ist Lorentz nicht der erste, der diese Formeln aufgestellt hat, sondern Larmor; vgl. S. 167, 174, 176—177 seines S. 67 genannten Buches von 1900: „Aether and Matter". Er benutzt sie auch, genau wie alle späteren Autoren, um einem gleichförmig (mit der Geschwindigkeit v) längs der x-Achse fortschreitenden System ein ruhendes zuzuordnen, für welches man die Lösung der Maxwellschen Gleichungen kennt, um diese dann rückwärts auf das bewegte System zu übertragen. Die bezüglichen Entwicklungen von Larmor aber haben keine Beachtung gefunden. Vielmehr setzte die stürmische Weiterentwicklung, von der wir nun zu berichten haben, erst ein, als Lorentz den ganzen Ansatz (der bei Larmor zwischen anderen Be-

trachtungen etwas versteckt ist) seinerseits wiederfand (siehe den Verslag der Amsterdamer Akademie Bd. 12, 1904, S. 986—1009). Daß er ihm schon 1892 nahe genug gewesen war, wurde bereits oben unter 2. bemerkt. Es läßt sich also immerhin einiges dafür sagen, daß sich bei uns an das Gleichungssystem (20), (20′) ausschließlich sein Name angeheftet hat.

5. Nun kommt das Jahr 1905 mit den entscheidenden Veröffentlichungen von Poincaré und Einstein, die unabhängig nebeneinander hergehen, trotzdem sie beide von dem „Postulat" oder dem „Prinzip" der „Relativität" sprechen.

Poincaré macht den Anfang mit einer Note, „Sur la dynamique de l'électron" in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 5. Juni, die dann als längerer Aufsatz dem Circolo Matematico in Palermo am 23. Juni vorgelegt wurde, aber als solcher erst 1906 erschienen ist („Sur la dynamique de l'électron", Palermo Rend., Bd. 21).

Einsteins Arbeit aber „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ist der Redaktion der Annalen der Physik am 30. Juni überreicht und schon am 26. September daselbst in (4) Bd. 17 herausgegeben worden.

Es ist sehr interessant, die solcherweise konkurrierenden Veröffentlichungen zu vergleichen. — Poincaré stellt das mathematische Rüstzeug klarer hervor: er bemerkt, daß die Lorentztransformationen in ihrer Gesamtheit eine Gruppe bilden (für die er dann die Bezeichnung Lorentzgruppe prägt); er benutzt schon zwischendurch die Vereinfachung, die entsteht, wenn man als vierte Variable $i\,c\,t$ wählt usw. Er sucht sodann vor allen Dingen die Probleme der Himmels-Mechanik, also die Lehre von der Gravitation, der Invariantentheorie („Relativitätstheorie") der Lorentzgruppe anzupassen, wobei sich ergibt, daß gegenüber der klassischen Theorie nur Abweichungen von der Größenordnung $\frac{v^2}{c^2}$ eintreten, unter v die Geschwindigkeit des jeweils betrachteten Himmelskörpers verstanden. Die klassische Theorie erscheint geradezu als Grenzfall der neuen für $c = \infty$. Wir werden auf diese Fragen weiter unten noch ausführlich zurückkommen. — Bei Einstein tritt dafür das naturphilosophische Denken in den Vordergrund. Er bemerkt, daß in den Lorentztransformationen eine ganz neue Auffassung des Zeitbegriffes enthalten ist. Es gibt keine Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse schlechthin, sondern nur eine solche relativ zu einem unter unendlich vielen gleichberechtigten herausgegriffenen Koordinatensystem. Und so groß ist das Vertrauen des jugendlichen Forschers zu der transienten Bedeutung der Mathematik, daß er voraussagt, eine Uhr, die sich bewegt (also vielleicht die Schwingungszahl einer bewegten Lichtquelle) messe für einen im System x, y, z, t ruhenden Beobachter nicht (um es mathematisch auszudrücken) das

$$\int dt\,,$$

sondern das

$$\int \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}},$$

sie gehe also für den ruhenden Beobachter in dem Maße langsamer, als

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

größer wird[1]).

6. Endlich die Jahre 1907/08 mit den abschließenden Arbeiten von Minkowski. Es sind dies vor allen Dingen folgende zwei, deren Veröffentlichung er noch selbst besorgte[2]):

a) Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. (Gött. Nachr. 1908, vorgelegt am 21. Dez. 1907 = Ges. Abh. Bd. 2.)

b) Raum und Zeit (Vortrag, gehalten auf der Naturforscherversammlung in Köln am 21. Sept. 1908). Ges. Abh. Bd. 2.

An sie schließt sich in Bd. 2 der gesammelten Abhandlungen, von Born aus dem Nachlasse herausgegeben:

c) Eine Ableitung der Grundgleichungen usw. vom Standpunkte der Elektronentheorie (zuerst in Bd. 68 der Math. Annalen 1910).

Dann aber ist noch 1915 aus seinen Papieren das Manuskript des Vortrages veröffentlicht worden, den er am 5. Nov. 1907 in unserer Göttinger mathematischen Gesellschaft gehalten hat:

d) Das Relativitätsprinzip (Ann. d. Phys. (4), 47 oder Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 24). Die Darstellung in d) ist mir die liebste von allen. Denn hier spricht Minkowski, weil er zu Fachgenossen redet, seine innersten mathematischen, insbesondere invariantentheoretischen Gedanken unverhüllt aus, während er z. B.

---

[1]) Einstein ist im Jahre 1879 in Ulm geboren. Seine Schulbildung war unregelmäßig, zum Teil in der Schweiz und in Italien. Er hat dann in Zürich studiert, wo er mit einer Arbeit über die innere Reibung der Gase promovierte, um dann eine kleine Stelle am Patentbüro in Bern zu übernehmen. Hier ist es, wo er seine Arbeit von 1905 schrieb, die ihm dann zur Habilitation in Bern und unmittelbar darauf zu einem Extraordinariat an der Universität Zürich verhalf. 1911 wurde er Ordinarius in Prag, 1912 am Polytechnikum in Zürich. Seit 1914 ist er der gefeierte Akademiker in Berlin. Einstein ist jüdischer Provenienz wie Hertz und Minkowski. — Wunderbar ist es, wie hier wieder ein ursprüngliches Talent sich außerhalb der regulären Schule entwickelt, ganz anders als Poincaré, der den fest umgrenzten französischen Bildungsgang für höhere Studien, unter Einschluß der École Polytechnique, durchlaufen hat. Zusammenhängend damit sind Einsteins mathematischen Vorkenntnisse anfänglich nur geringe gewesen; er hat sie im Verkehr mit anderen Mathematikern erst allmählich erweitert. Dafür hat die irreguläre Ausbildung ihm die Originalität eigenen Nachdenkens bewahrt. Ob dies für ihn nicht ein überwiegender Vorteil gewesen ist?

[2]) Minkowski ist am 12. Januar 1909 an den Folgen einer Operation im Alter von nur 44 Jahren gestorben.

in a), um keine spezifischen Vorkenntnisse voraussetzen zu müssen, die kühle Darstellung durch einen ad hoc ersonnenen Matrizenkalkül wählt, dessen äußere Einzelheiten zwar elementar zugänglich sind, dessen inneres Zustandekommen aber unzugänglich bleibt.

Wir haben bei Minkowski beides: die volle Beherrschung des mathematischen Apparates der Relativitätstheorie der Lorentzgruppe und deren in lapidaren Sätzen festgelegte naturphilosophische Tragweite. In ersterer Hinsicht werde hier vorweg bemerkt, mit Rücksicht auf die von uns selbst in den vorigen Paragraphen gegebene Darstellung: daß erst Minkowski die wahre Natur der X, Y, Z, L, M, N als der Komponenten eines Sechsertensors klar erkannt und damit den inneren Aufbau der Maxwellschen Gleichungen völlig verstanden hat[1]). Im übrigen wird unsere ganze folgende Darstellung von den Minkowskischen Auffassungen getragen sein, wobei wir uns dem Plane der gegenwärtigen Darstellung entsprechend leider ganz auf die elementaren Anfänge beschränken müssen.

In der äußeren Form schließen wir uns dann vielfach an die wiederholt genannten und von den deutschen Physikern viel gelesenen Kommentare von Sommerfeld, 1910 an: Zur Relativitätstheorie, Teil 1: Vierdimensionale Vektoralgebra, Ann. d. Phys. (4), 32; Teil 2: Vierdimensionale Vektoranalysis, ebenda 33. Nur ersetzen wir die geometrischen Analogien, mit denen Sommerfeld arbeitet, lieber durch die uns schon geläufigen invariantentheoretischen Rechnungen und Begriffsbildungen. Dies hat auch schon v. Laue in seinem Lehrbuch: „Das Relativitätsprinzip" (Bd. 1, Braunschweig 1911, 2. Aufl. 1913[2])) getan, doch glaube ich manches präziser oder auch einfacher darstellen zu können. Diese größere Einfachheit ist namentlich dadurch erzielt, daß ich ganz darauf verzichte, die vorliegenden Experimente zu besprechen und ihre ursprünglich dreidimensionale Erfassung allmählich vierdimensional umzudeuten, sondern daß ich von vornherein das vierdimensionale Denken deduktiv zur Geltung bringe. So ist es bekanntlich bequemer, zuerst das Kopernikanische Weltbild zu entwickeln, statt von den geozentrischen Beobachtungen aus auf dem Wege über die Ptolemäische Darstellung zu ihm aufzusteigen. Freilich bleibt der ein halber Astronom, der sich nun mit der Kopernikanischen Auffassung in abstracto begnügt und sich nicht eingehend bemüht, die Einzelheiten der geozentrischen Beobachtungen von dort aus genau durchzudenken.

---

[1]) Leider hat Minkowski in a) für das, was wir hier Sechsertensor nennen, das völlig farblose Wort „Vektor zweiter Art". In d) dagegen hat er dafür die neue, aber meinem Gefühl nach ganz zweckmäßige Bezeichnung „Traktor" vorgeschlagen.

[2]) Der 2. Bd. (1921 bzw. 1923) behandelt die allgemeine Relativitätstheorie. (H.)

§ 7. Von der Weiterverbreitung der neuen Doktrin. Die Entwicklung seit 1911 bzw. 1909.

Als „neue Doktrin“ soll hier die Auffassung bezeichnet sein, daß die Relativitätstheorie der Galilei-Newton-Gruppe in allen Teilen der Physik durch die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe ersetzt werden müsse.

Die Mehrzahl der älteren Physiker hat sich ihr nur zögernd, wenn überhaupt, angeschlossen, wie psychologisch verständlich ist. Wer Dezennien hindurch in sich eine bestimmte Denkweise ausgestaltet hat, kann sich nicht plötzlich umschalten. Jedenfalls wird er immer versuchen, auf dem Wege über seine früheren Ansätze hinüber die neuen Formulierungen zu erfassen, was zu allerlei Umständlichkeiten führen muß. So ist es z. B. mit Lorentz selbst. Ganz anders die jüngere Generation. Vieles, was in der Elektrodynamik kompliziert erschien, wurde jetzt plötzlich einfach; wir werden darauf noch mannigfach zurückkommen und manche Einzelnamen nennen. Es entstand ein vielseitiges enthusiastisches Vorwärtsstreben. Als prinzipielle Fortschritte aber will ich nennen, daß es Planck schon 1907 gelang[1]), die thermodynamischen Lehren mit der neuen Auffassung in Verbindung zu setzen, und daß Herglotz 1911 die Mechanik der deformierbaren Körper, für welche Minkowski schon Ansätze gegeben hatte, in abschließender Weise behandelte[2]).

Doch dieses sind Dinge, die wir hier nur beiläufig berühren können. Wichtiger für uns ist es, zu konstatieren bzw. zu erklären, daß die Mathematiker in großer Zahl sich sofort der neuen Bewegung anschlossen. Auf der einen Seite kann hierzu gesagt werden, daß derjenige, der durch die Schule der Nichteuklidischen Geometrie gegangen war, von vornherein prädisponiert war, die Galilei-Newton-Gruppe, sobald dies wünschenswert schien, gegen die Lorentzgruppe, von der sie ein Grenzfall ist, zu vertauschen. Es fiel in dieser Hinsicht eben jede innere Hemmung fort. Aber viel wichtiger war noch, daß die Mathematiker die neuen Gedankenreihen, die jetzt verlangt wurden, vermöge ihrer invariantentheoretischen (oder geometrischen) Untersuchungen, wenn auch in anderer Form, ohne es zu wissen, bereits fertig in sich herumtrugen. Niemand hat dies lebhafter empfunden und die dadurch gegebene Sachlage höher eingeschätzt als Minkowski selbst, der in seinem oben unter d) genannten Vortrag vor der Göttinger mathematischen Gesellschaft sich zu Eingang folgendermaßen äußert:

„Der Mathematiker ist besonders gut prädisponiert, die neuen

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1907 = Ann. d. Phys. (4), Bd. 26 (1908).

[2]) Ann. d. Phys. (4), Bd. 36 (1911).

Anschauungen aufzunehmen, weil es sich dabei um eine Akklimatisierung an Begriffsbildungen handelt, die ihm längst äußerst geläufig sind, während der Physiker jetzt diese Begriffe zum Teil neu erfinden und sich durch einen Urwald von Unklarheiten mühevoll einen Pfad durchholzen muß, indessen ganz in der Nähe die längst vortrefflich angelegte Straße des Mathematikers bequem vorwärtsführt. Überhaupt würden die neuen Ansätze, fälls sie tatsächlich die Erscheinungen richtig wiedergeben, fast den größten Triumph bedeuten, den je die Anwendung der Mathematik gezeigt hat. Es handelt sich, — so kurz wie möglich ausgedrückt — darum, daß die Welt in Raum und Zeit in gewissem Sinne eine vierdimensionale Nichteuklidische Mannigfaltigkeit ist. Es würde zum Ruhme der Mathematiker, zum grenzenlosen Erstaunen der übrigen Menschheit offenbar werden, daß die Mathematiker rein in ihrer Phantasie ein großes Gebiet geschaffen haben, dem, ohne daß dieses je in der Absicht dieser so idealen Gesellen gelegen hätte, eines Tages die vollendete reale Existenz zukommen sollte."

Zu diesen Worten Minkowskis kann ich nur erklären, daß sie zugleich die Auffassungen und die Vorbedingungen genau treffen, von denen aus die gegenwärtige Darstellung unternommen wurde. Und sie werden noch weiter reichen. Sie werden auch deren kommenden Teile noch umspannen, sofern es uns gelingt, zu den weiteren physikalischen Ansätzen Stellung zu nehmen, die durch Einsteins gedankenreiche Arbeiten von 1911 ausgelöst worden sind[1]). Indem Einstein nach einem Formalismus suchte, der eine innere Einfügung der Lehre von der Gravitation in die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen ermöglichte, kam er spontan dazu, die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe, also einer linearen Gruppe mit einer beschränkten Zahl von Parametern, durch die Relativitätstheorie der Gruppe aller Punkttransformationen, also einer unendlichen kontinuierlichen Gruppe nach der von Lie eingeführten Bezeichnungsweise — zu ersetzen. Wir werden nachher, um das zu verstehen, weit ausholen und namentlich der tiefgründigen Ideen gedenken müssen, welche Riemann in seiner Habilitationsvorlesung von 1854 „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" entwickelt hat. Daß Riemann dabei ganz wesentlich von naturphilosophischen Interessen geleitet war, wurde schon in Bd. 1 hervorgehoben.

Im übrigen nenne ich gerne noch einen andern in unserer Richtung liegenden Fortschritt, der 1909 von mathematischer Seite gewonnen wurde. Es trifft sich so, daß ich wieder an das Erlanger Programm anknüpfen kann. An die Betrachtung der Euklidischen Gruppe des R_3 mit ihren 6 Parametern schließt sich dort die Betrachtung derjenigen

[1]) Vergleiche S. 67, Anm. 3 (H.).

erweiterten Gruppe, welche aus ihr durch Hinzunahme der Transformation durch reziproke Radien entsteht. Es ist eine G_{10}, die ich später kurzweg die konforme Gruppe genannt habe, weil sie sich (wie dies der Sache nach schon 1845 von Liouville erkannt wurde) mit der Gesamtheit derjenigen Raumtransformationen deckt, welche $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ in ein Multiplum seiner selbst überführen. Auch sie läßt sich als eine homogene lineare Gruppe schreiben, wenn man nämlich

$$x = \frac{\xi}{w}, \qquad y = \frac{\eta}{w}, \qquad z = \frac{\zeta}{w}$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\varrho}{w}$$

setzt: sie ist dann durch diejenigen homogenen linearen Substitutionen der 5 Variablen $\xi, \eta, \zeta, \varrho, w$ dargestellt, welche die quadratische Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \varrho w = 0$$

in sich überführen. Alles das läßt sich auf n Dimensionen übertragen; es entsteht eine $G_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, im R_4 also eine G_{15} [1]). — Andererseits hat W. Thomson in seinen ersten Arbeiten (1845) bekanntlich nachgewiesen und weitgehend benutzt, daß aus jeder Potentialfunktion $V(x, y, z)$ des R_3, d. h. jeder Funktion, welche die Gleichung $\Delta = 0$ befriedigt, durch Inversion am Koordinatenanfangspunkt und Division durch r eine neue Potentialfunktion, nämlich

$$\frac{1}{r} V\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

hervorgeht. Auch dieses läßt sich mit leichter Modifikation auf beliebig viele Dimensionen übertragen und dabei dann die ganze zugehörige konforme Gruppe heranziehen; ich darf wegen dieser Sachlage auf die beiden Bücher von Pockels [2]) und Bôcher [3]) verweisen. — Nun lernten wir, daß die Maxwellschen Gleichungen nach Einführung von l für $i\,c\,t$ auf das engste mit der Potentialtheorie des vierdimensionalen Raumes (die durch die Gleichung $\Box = 0$ gegeben wird), zusammenhängen. Es ist also fast selbstverständlich, daß man sich fragt, ob man die Maxwellschen Gleichungen nicht durch geschickte Anwendung allgemeiner konformer Transformationen der x, y, z, l in sich verwandeln könne. Trotzdem scheint

---

[1]) Hiermit haben sich Darboux, Lie und ich selbst in den Jahren 1869—1872 viel beschäftigt; siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung in meinen „Vorlesungen über höhere Geometrie", Teil 1 (Berlin, 1926).

[2]) Über die partielle Differentialgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ und ihr Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig, 1891.

[3]) Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig, 1894.

niemand an diese Möglichkeit gedacht zu haben, bis sie 1909 von den englischen Mathematikern Cunningham und Bateman in vollem Umfange bestätigt wurde; insbesondere hat Bateman sehr interessante invariantentheoretische Entwicklungen hierzu gegeben (siehe Proceedings of the London Mathematical Society (2), VIII, 1910ff.). Man hat die X, Y, Z, L, M, N jeder einzelnen konformen Transformation des R_4 entsprechend selbst einer homogenen linearen Substitution zu unterwerfen, deren Koeffizienten nur keine konstanten Größen, sondern bestimmte einfache Funktionen von x, y, z, t sind.

Die Methode der Relativitätstheorie hat also für die Maxwellschen Gleichungen eine noch wesentlich über die Lorentzgruppe hinausgehende Bedeutung. Die wunderbare Harmonie aber, welche zwischen den alten Entwicklungen der reinen Mathematiker und den Gedankenkonstruktionen der neueren Physiker besteht, bewährt sich aufs neue auf einem erweiterten Gebiete. — Merkwürdigerweise haben diese Untersuchungen jedenfalls bei uns in Deutschland bisher nur wenig Beachtung gefunden und auch wir werden darum nur gelegentlich auf sie zurückkommen können.

II. Behandlung der Lorentzgruppe in orthogonaler Form.

Unsere weiteren Ausführungen über die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe gliedern sich von selbst in zwei Teile. Wir werden zuerst, um die innere Symmetrik der Ansätze hervorzukehren, von der orthogonalen Schreibweise der Substitutionen Gebrauch machen, also von den x_1, x_2, x_3, x_4 usw. (gemäß § 2 der vorigen Abteilung) ausgehen. Wir werden dann zweitens den besonderen Realitätsverhältnissen der Lorentzgruppe Rechnung tragen. Diese Trennung läßt sich allerdings, wenn man Wiederholungen vermeiden will, nicht völlig durchführen, aber wird doch für die folgenden Abteilungen II und III im ganzen charakteristisch sein.

§ 1. Elemente der zugehörigen Viereranalysis.

1. Die Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 (oder auch y_1, y_2, y_3, y_4 usw.) der vierdimensionalen „Welt", für die sich die Lorentzgruppe als Inbegriff derjenigen ∞^{10} nicht-homogenen linearen Substitutionen darstellt,

$$(1)\qquad x_i' = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3 + \varepsilon_i x_4 + \zeta_i, \; (i = 1, \cdots, 4)$$

bei denen die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i$ eine orthogonale Matrix von der Determinante 1 bilden.

2. Die *Vierervektoren*, d. h. Komplexe von 4 Größen, welche die

homogenen Substitutionen erleiden, die von (1) übrig bleiben, wenn man die Glieder ζ_i wegstreicht. Einfache Beispiele bilden die Differenzen zweier Reihen von Punktkoordinaten:

$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \quad x_3 - y_3, \quad x_4 - y_4$$

und insbesondere die Differentiale:

$$d x_1, \ d x_2, \ d x_3, \ d x_4;$$

ebenso aber auch die partiellen Differentialzeichen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}, \ \frac{\partial}{\partial x_3}, \ \frac{\partial}{\partial x_4}$$

(weil bei orthogonalen Substitutionen der Unterschied von Kogredienz und Kontragredienz fortfällt).

Wir werden es im folgenden nicht nur mit einzelnen Vektoren, sondern mit Vektorfeldern zu tun haben. Wir bezeichnen daher die Vierervektoren, damit ihre Komponenten nicht mit Punktkoordinaten verwechselt werden können, durch

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ u_4 \ \text{bzw.} \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ v_4 \ \text{usw.} \tag{2}$$

Die einfachsten in der Vektoranalysis auftretenden *Skalare* haben wir dann in der quadratischen Form

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \quad \text{bzw.} \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \tag{3}$$

und in der zugehörigen Polare vor uns:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4. \tag{4}$$

Es ist nun nur ein besonderer Fall von (4), wenn wir bei einem Vektorfelde $u\,(x)$ von der *Großdivergenz*

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = \mathrm{Div}\,(u) \tag{5}$$

sprechen; die Vorsilbe „Groß", die wir nach Sommerfeld gebrauchen, soll hier und in ähnlichen Fällen daran erinnern, daß wir es mit vier, und nicht mit drei Variablen zu tun haben.

3. Sei $f\,(x)$ irgend ein Skalar, dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

ein Vierervektor, der *Großgradient* von f. Aus ihm entstehen als neue Skalare einerseits

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^2,$$

andererseits

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2},$$

welch letzteren wir wieder mit

(6) $$\Box f$$

bezeichnen.

4. Die *Sechsertensoren*, d. h. Komplexe von je 6 Größen λ_{ik} (oder auch μ_{ik}), die sich wie die zugehörigen Unterdeterminanten p_{ik} (bzw. q_{ik}) einer zweigliedrigen Komponenten-Matrix von Vierervektoren

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

substituieren. Wir haben für die λ_{ik} *zwei Invarianten*:

(7) $$\begin{cases} \Lambda = \lambda_{14}\lambda_{23} + \lambda_{24}\lambda_{31} + \lambda_{34}\lambda_{12} \\ \Omega = \sum \lambda_{ik}^2 \end{cases}.$$

Die „dualen" μ_{ik} sind am übersichtlichsten durch die Gleichungen gegeben:

(8) $$\mu_{ik} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_{ik}},$$

worauf Λ den Wert annimmt:

(9) $$M = \mu_{14}\mu_{23} + \mu_{24}\mu_{31} + \mu_{34}\mu_{12}.$$

Also ist auch umgekehrt:

(10) $$\lambda_{ik} = \frac{\partial M}{\partial \mu_{ik}}.$$

Im übrigen werden wir wieder, je nach Bedürfnis:

(11) $$\lambda_{ki} = -\lambda_{ik}, \quad \lambda_{ii} = 0$$

(und ähnlich für die μ_{ik}) in die Formeln einführen. Im besonderen bevorzugen wir freilich immer den Index 4.

5. Wichtig ist weiterhin der besondere Sechsertensor, der — unter u irgend ein Vierervektor verstanden — aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix},$$

hervorgeht, also:

(12) $$\lambda_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Wir nennen ihn Rot u, die *Großrotation* des Vektorfeldes (u).

Aus den Koordinaten λ_{ik} bzw. μ_{ik} eines beliebigen Sechsertensors und einem beliebigen Vierervektor u_i lassen sich, wie schon in I, § 2 erwähnt, zwei neue Vierervektoren nach dem einfachen Schema zusammensetzen:

(13) $$v_i = \sum_k \lambda_{ik} u_k \quad \text{bzw.} \quad v_i' = \sum_k \mu_{ik} u_k.$$

6. Um nun doch etwas Neues zu geben, bemerken wir, daß sich aus den Koordinaten λ_{ik} zweierlei Größentripel zusammensetzen lassen, die wir *Dreiertensoren* nennen.

Bildet man nämlich die beiden Skalare

$$\Omega \pm 2\Lambda,$$

so erhält man 2 ternäre Invarianten:

$$(\lambda_{14} \pm \lambda_{23})^2 + (\lambda_{24} \pm \lambda_{31})^2 + (\lambda_{34} \pm \lambda_{12})^2;$$

daraus folgt, daß sich die beiden Größensysteme:

(14) $$\lambda_{14} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} + \lambda_{31}, \quad \lambda_{34} + \lambda_{12}$$

bzw. $$\lambda_{14} - \lambda_{23}, \quad \lambda_{24} - \lambda_{31}, \quad \lambda_{34} - \lambda_{12}$$

je ternär orthogonal (übrigens nicht etwa kogredient) substituieren; auf die Einzelheiten werden wir in § 2 zurückkommen. Hier sei an die ursprüngliche elektromagnetische Bedeutung der λ_{ik} erinnert. Wir hatten

$$\lambda_{23} = L, \quad \lambda_{31} = M, \quad \lambda_{12} = N,$$
$$\lambda_{14} = iX, \quad \lambda_{24} = iY, \quad \lambda_{34} = iZ.$$

Es handelt sich also bei den Dreiergrößen (14) um die komplexen Verbindungen

(15) $$L \pm iX, \quad M \pm iY, \quad N \pm iZ,$$

die man bei der Behandlung der Maxwellschen Gleichungen schon oft eingeführt hat, ohne gerade das hier zutage tretende Prinzip hervorzukehren.

7. Endlich die *Zehnertensoren*, die schon oben (Kap. 1 B, § 4) erwähnt waren. Es handelt sich um den Inbegriff der Koeffizienten a_{ik} irgend einer aus den Koordinaten eines Vierervektors gebildeten quadratischen Form, also um Größenkomplexe a_{ik}, die sich bei der Lorentzgruppe so substituieren, daß

(16) $$\sum a_{ik} u_i u_k$$

invariant ist. Wir nannten a. a. O. auch schon den besonderen Zehnertensor mit den Koeffizienten

$$\delta_{ik} = 0 \ (i \neq k), \quad \delta_{ii} = 1.$$

8. Es gibt eine einfache Methode, aus einem Sechsertensor λ_{ik} einen Zehnertensor abzuleiten. Schreiben wir gemäß (13):

$$v_i = \sum_k \lambda_{ik} u_k,$$

so haben wir einen neuen Vierervektor und ebenso, wenn wir diese Substitution wiederholen:

$$w_h = \sum \lambda_{hi} v_i.$$

Ziehen wir zusammen, so haben wir:

$$w_h = \sum_i \sum_k \lambda_{hi} \lambda_{ik} u_k,$$

und in dem hier auftretenden Koeffizientensystem, weil es zur Hauptdiagonale symmetrisch ist, einen Zehnertensor *. Es verlohnt sich, dies Koeffizientensystem ausführlich hinzuschreiben. Wir erhalten bei geeigneter Anordnung der Indizes:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{14}^2 & \lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{14}\lambda_{42} & \lambda_{14}\lambda_{43} + \lambda_{12}\lambda_{23} & \lambda_{12}\lambda_{24} + \lambda_{13}\lambda_{34} \\ \lambda_{23}\lambda_{31} + \lambda_{24}\lambda_{41} & -\lambda_{23}^2 - \lambda_{24}^2 - \lambda_{21}^2 & \lambda_{24}\lambda_{43} + \lambda_{21}\lambda_{13} & \lambda_{21}\lambda_{14} + \lambda_{23}\lambda_{34} \\ \lambda_{32}\lambda_{21} + \lambda_{34}\lambda_{41} & \lambda_{34}\lambda_{42} + \lambda_{31}\lambda_{12} & -\lambda_{34}^2 - \lambda_{31}^2 - \lambda_{32}^2 & \lambda_{31}\lambda_{14} + \lambda_{32}\lambda_{24} \\ \lambda_{42}\lambda_{21} + \lambda_{43}\lambda_{31} & \lambda_{43}\lambda_{32} + \lambda_{41}\lambda_{12} & \lambda_{41}\lambda_{13} + \lambda_{42}\lambda_{23} & -\lambda_{41}^2 - \lambda_{42}^2 - \lambda_{43}^2 \end{pmatrix}$$

Addieren wir hier noch überall $\frac{1}{2}\delta_{ik}\cdot\Omega$, so bekommen wir folgende Matrix *, die bei den Untersuchungen über das elektromagnetische Feld der λ_{ik} eine große Rolle spielt und die dementsprechend mit dem besonderen Buchstaben F bezeichnet sein soll:

$$(17)\quad F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{14}^2 \\ -\lambda_{34}^2 - \lambda_{42}^2 - \lambda_{23}^2\end{pmatrix} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_{23}^2 + \lambda_{24}^2 + \lambda_{21}^2 \\ -\lambda_{41}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{34}^2\end{pmatrix} & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_{34}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 \\ -\lambda_{12}^2 - \lambda_{24}^2 - \lambda_{41}^2\end{pmatrix} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_{41}^2 + \lambda_{42}^2 + \lambda_{43}^2 \\ -\lambda_{23}^2 - \lambda_{31}^2 - \lambda_{12}^2\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Der Term rechts unten nimmt, wenn wir ihn noch durch c^2 dividieren, in den X, Y, Z, L, M, N geschrieben, folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{2c^2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2).$$

Diesen Ausdruck pflegen die Physiker die spezifische (auf die Einheit des Volumens berechnete) Energie des elektromagnetischen Feldes zu nennen. Von hier das besondere Interesse, welches man dem Zehnertensor F zugewandt hat (so daß man ihn gelegentlich geradezu als „Welttensor" bezeichnet). Die spezifische Energie ist also gegenüber der Lorentzgruppe keineswegs etwas Invariantes, sondern eben nur eine der Komponenten eines Zehnertensors. Auf die physikalische Bedeutung der übrigen Komponenten werden wir später zurückkommen.

9. Aus den Komponenten a_{ik} eines Zehnertensors und den u_k eines Vierervektors entsteht allgemein in der Gestalt

$$\sum_k a_{ik} u_k; \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

ein neuer Viererrvektor. Als besonderen Fall haben wir wieder:

$$(18) \qquad \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1, \ldots, 4).$$

Diesen Vektor bezeichnet Sommerfeld als die *Vektordivergenz des Zehnertensors* a_{ik}. Für den elektromagnetischen Zehnertensor F verschwindet die Vektordivergenz vermöge der Maxwellschen Gleichungen identisch (wie man aus dem Bildungsgesetz von F ablesen oder auch hinterher durch wirkliche Ausrechnung verifizieren mag). Wir werden darauf in § 6 eingehen.

§ 2. Neue Einschaltung über Quaternionen.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen gehen in ihrem Wesen alle auf Minkowskis große Arbeit von 1907/08 zurück. Minkowski erwähnt dort gelegentlich auch, daß der Formalismus der Quaternionen Dienste leisten könne, ihm aber zu schwerfällig scheine. Ich möchte aber angeben, wie einfach sich die Grundformeln der Theorie in Quaternionen schreiben lassen.

Bereits Kap. I B, § 3 wurde gezeigt, wie man die allgemeinen orthogonalen Substitutionen von der Determinante 1 bei 4 und bei 3 Veränderlichen durch Quaternionen darstellen kann. Wir haben jetzt nur einige neue Bezeichnungen hinzuzunehmen. Zunächst schreiben wir einen Vierervektor (u) als Quaternion:

$$(u) = i\,u_1 + j\,u_2 + k\,u_3 + u_4.$$

Wir bezeichnen ferner die Quadratsumme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ der Koeffizienten einer Quaternion $q = i\,a + j\,b + k\,c + d$ mit Nq, d. h. Norm von q. Dann schreibt sich für den Vierervektor (u) die allgemeinste unimodulare orthogonale Substitution, d. h. die allgemeine Lorentzsubstitution in orthogonaler Form in der Gestalt:

$$(1) \qquad (\bar{u}) = \frac{q \cdot (u) \cdot q'}{\sqrt{Nq \cdot Nq'}}.$$

Hier sind q, q' zwei beliebige Quaternionen. Nehmen wir aber insbesondere $q' = q^{-1}$, so wird $Nq \cdot Nq' = 1$, $\bar{u}_4 = u_4$, und wir behalten in der Formel

$$(2) \qquad (i\,\bar{u}_1 + j\,\bar{u}_2 + k\,\bar{u}_3) = q\,(i\,u_1 + j\,u_2 + k\,u_3)\,q^{-1}$$

die allgemeinste ternäre unimodulare orthogonale Substitution der 3 Variablen u_1, u_2, u_3.

Nun wurden doch im vorigen Paragraphen Dreiertensoren genannt, d. h. Komplexe, welche bei Ausübung der quaternären Substitution (1) auf die u selbst ternäre orthogonale Substitutionen erleiden. Diese Substitutionen sind nun dem Wesen nach durch (2) gegeben. Man findet nämlich, bei Voraussetzung der Formel (1), für den Dreiertensor

$$\lambda_{14}+\lambda_{23},\quad \lambda_{24}+\lambda_{31},\quad \lambda_{34}+\lambda_{12}$$

die Substitution

$$\begin{aligned}(3)\qquad & i\,(\bar\lambda_{14}+\bar\lambda_{23})+j\,(\bar\lambda_{24}+\bar\lambda_{31})+k\,(\bar\lambda_{34}+\bar\lambda_{12})\\ &= q'^{-1}\left(i\,(\lambda_{14}+\lambda_{23})+j\,(\lambda_{24}+\lambda_{31})+k\,(\lambda_{34}+\lambda_{12})\right)q',\end{aligned}$$

aus der q ganz herausfällt, und für den anderen Dreiertensor

$$\lambda_{14}-\lambda_{23},\quad \lambda_{24}-\lambda_{31},\quad \lambda_{34}-\lambda_{12}$$

die entsprechend gebaute Substitution

$$\begin{aligned}(3')\qquad & i\,(\bar\lambda_{14}-\bar\lambda_{23})+j\,(\bar\lambda_{24}-\bar\lambda_{31})+k\,(\bar\lambda_{34}-\bar\lambda_{12})\\ &= q\left(i\,(\lambda_{14}-\lambda_{23})+j\,(\lambda_{24}-\lambda_{31})+k\,(\lambda_{34}-\lambda_{12})\right)q^{-1}.\end{aligned}$$

Hiermit sind ersichtlich auch die Substitutionen, welche die λ_{ik} einzeln bei Anwendung der Lorentzsubstitution (1) erleiden, in einfachster Weise explizite hingeschrieben.

Aber auch die Maxwellschen Gleichungen selbst lassen sich jetzt in knappster Weise zusammenfassen. Wir haben zu dem Zwecke nur den Operator zu bilden:

$$(4)\qquad i\frac{\partial}{\partial x_1}+j\frac{\partial}{\partial x_2}+k\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}=\Diamond.$$

Dann schreiben sich die beiden Reihen der Maxwellschen Gleichungen, wie man durch Nachrechnen bestätigt, einfach folgendermaßen:

$$(5)\qquad \begin{cases}\text{I.}\quad \Diamond\left(i\,(\lambda_{14}+\lambda_{23})+j\,(\lambda_{24}+\lambda_{31})+k\,(\lambda_{34}+\lambda_{12})\right)=0,\\ \text{II.}\quad \left(i\,(\lambda_{14}-\lambda_{23})+j\,(\lambda_{24}-\lambda_{31})+k\,(\lambda_{34}-\lambda_{12})\right)\Diamond=0.\end{cases}$$

Der Beweis aber, daß diese Gleichungen bei den Substitutionen (1) bzw. (3) und (2) invariant bleiben, ergibt sich ohne jede Zwischenrechnung. Es genügt aus Symmetriegründen, daß wir den Faktor $\frac{q}{\sqrt{Nq}}$ von (1) in Betracht ziehen, und $q'=1$ setzen. Dann bleiben die Gleichungen I ungeändert, weil besagter Faktor $\frac{q}{\sqrt{Nq}}$ dem Symbol $\Diamond$ vorzusetzen ist, der andere Faktor $i\,(\lambda_{14}+\lambda_{23})+\cdots$ aber überhaupt keine Änderung erleidet. Die Gleichungen II aber nehmen zunächst die Gestalt an:

$$q\left(i\,(\lambda_{14}-\lambda_{23})+j\,(\lambda_{24}-\lambda_{31})+k\,(\lambda_{34}-\lambda_{12})\right)\overbrace{q^{-1}\frac{q}{\sqrt{Nq}}}\Diamond=0$$

und hier heben sich die beiden durch die horizontale Klammer zusammengefaßten Faktoren (die man nach dem assoziativen Gesetz der Quaternionen-Multiplikation zusammenziehen darf) bis auf den nicht weiter in Betracht kommenden Nenner $N\,(q)$ gegenseitig weg, so daß nur q vorn als Faktor zugesetzt erscheint, wodurch die Gültigkeit der Gleichungen nicht aufgehoben wird.

Formel (1) läßt noch eine Verallgemeinerung zu, die uns für später nützlich sein wird. Im Nenner von (1) steht die Quadratwurzel

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)}.$$

Um rationale Darstellung zu erzielen, wollen wir, was ersichtlich keine Einschränkung ist,

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 \tag{6}$$

nehmen und, um auch diese Bedingung durch rationale Funktionen unabhängiger Parameter zu erfüllen, in scheinbar unsymmetrischer Weise

$$\begin{aligned} \frac{a-a'}{2} &= A_1, & \frac{b-b'}{2} &= B_1, & \frac{c-c'}{2} &= C_1, & \frac{d+d'}{2} &= D_1, \\ \frac{a+a'}{2} &= A_2, & \frac{b+b'}{2} &= B_2, & \frac{c+c'}{2} &= C_2, & \frac{d-d'}{2} &= D_2 \end{aligned} \tag{7}$$

setzen. Wir haben dann, (6) entsprechend,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0, \tag{8}$$

so daß in der Tat eine dieser 8 Größen durch die 7 andern rational ausgedrückt werden kann. Die Symmetrie würde leiden, wenn wir dies wirklich ausführten. Wir werden darum die 8 Größen $A_1, \ldots, D_2$ sämtlich beibehalten und fordern, daß sie an die Bedingungen (8) gebunden sein sollen. Im übrigen wird nun, wenn wir

$$\begin{aligned} iA_1 + jB_1 + kC_1 + D_1 &= Q_1 \\ iA_2 + jB_2 + kC_2 + D_2 &= Q_2 \end{aligned}$$

setzen,

$$\begin{aligned} q &= i(A_1+A_2) + j(B_1+B_2) + k(C_1+C_2) + (D_1+D_2) = (Q_1+Q_2), \\ q' &= -i(A_1-A_2) - j(B_1-B_2) - k(C_1-C_2) + (D_1-D_2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{q'}{a^2+b^2+c^2+d^2} &= (i(A_1-A_2) + j(B_1-B_2) + k(C_1-C_2) + (D_1-D_2))^{-1} \\ &= (Q_1-Q_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Daher schreibt sich die Formel (1) jetzt in der Form

$$(\bar{u})(Q_1-Q_2) = (Q_1+Q_2)(u) \tag{9}$$

(wo die 8 Größen $A_1, \ldots, D_2$, die wir der Bedingung (8) unterwarfen, ersichtlich homogen vorkommen, so daß wir in unserer Formel die richtige Zahl von 6 wesentlichen Parametern haben). Übrigens findet sich die kleine Zwischenrechnung, die uns von (1) zu (8) und (9) führte, bereits in Cayleys ursprünglicher Veröffentlichung; nur gerade in umgekehrter Reihenfolge (so daß Formel (1) den Schluß abgibt; siehe

Crelles Journal 50. 1855 = Cayleys Werke II, S. 202 ff., insbesondere S. 213—215 daselbst). Nun mögen folgende Bemerkungen angeschlossen werden:

1. Will man nicht $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ durch eine lineare Substitution mit reellen Koeffizienten in sich transformieren, sondern $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, so muß man die Formeln (9) so umschreiben:

$$(10) \qquad \begin{aligned}&(\bar{u}_4 + \varepsilon(i\bar{u}_1 + j\bar{u}_2 + k\bar{u}_3))(Q_1 - \varepsilon Q_2)\\ &= (Q_1 + \varepsilon Q_2)(u_4 + \varepsilon(iu_1 + ju_2 + ku_3)),\end{aligned}$$

wo ε die gewöhnliche imaginäre Einheit ist: $\varepsilon^2 = -1$.

Die Formeln (3), (3′) für die Transformation der Dreiertensoren aber werden dann so lauten:

$$(11) \quad \begin{aligned}&(Q_1 - \varepsilon Q_2)(i(\bar{\lambda}_{14} + \varepsilon\bar{\lambda}_{23}) + j(\bar{\lambda}_{24} + \varepsilon\bar{\lambda}_{31}) + k(\bar{\lambda}_{34} + \varepsilon\bar{\lambda}_{12}))\\ &= (i(\lambda_{14} + \varepsilon\lambda_{23}) + j(\lambda_{24} + \varepsilon\lambda_{31}) + k(\lambda_{34} + \varepsilon\lambda_{12}))(Q_1 - \varepsilon Q_2),\end{aligned}$$

$$(11') \quad \begin{aligned}&(i(\bar{\lambda}_{14} - \varepsilon\bar{\lambda}_{23}) + j(\bar{\lambda}_{24} - \varepsilon\bar{\lambda}_{31}) + k(\bar{\lambda}_{34} - \varepsilon\bar{\lambda}_{12}))(Q_1 + \varepsilon Q_2)\\ &= (Q_1 + \varepsilon Q_2)(i(\lambda_{14} - \varepsilon\lambda_{23}) + j(\lambda_{24} - \varepsilon\lambda_{31}) + k(\lambda_{34} - \varepsilon\lambda_{12}))\end{aligned}$$

2. Wir werden diese Formeln mit den früheren zusammenfassen, indem wir freistellen, $\varepsilon^2 = \pm 1$ zu nehmen, ja wir werden sie noch so verallgemeinern können, daß

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \pm c^2 u_4^2$$

in sich übergeht, indem wir $\varepsilon^2 = \pm c^2$ nehmen.

Hierin liegt die Möglichkeit, nicht nur der Lorentzgruppe in ihrer auf die Lichtgeschwindigkeit c bezüglichen reellen Form gerecht zu werden, sondern auch die Galilei-Newton-Gruppe als den für $c = \infty$ herauskommenden Grenzfall glatt hinzuschreiben. Wir haben nur bei (10) die Bedingung $\varepsilon^2 = 0$ hinzuzufügen, also mit ε so zu rechnen, wie man dies bei unendlich kleinen Größen zu tun pflegt.

Wir sind hiermit in den Bereich der sogenannten *Biquaterionen* gelangt, der seitens der Geometer schon lange bearbeitet wurde — nur daß von ihnen u_1, u_2, u_3, u_4 natürlich nicht physikalisch gedeutet wurden, sondern als Verhältniskoordinaten im Raum von 3 Dimensionen. Die Substitutionen (10) geben dann, je nach der Verfügung über das ε^2, die „Bewegungen" des elliptischen, hyperbolischen und parabolischen R_3 (um die Benennungen zu gebrauchen, die ich selbst seinerzeit für die verschiedenen Arten von Cayleys projektiver Maßbestimmung vorschlug[1]); es heißt unnötigerweise höhere Gedankenverbindungen heranziehen, wenn man statt dessen meist, in Anlehnung an Riemanns allgemeine Ansätze, von Räumen konstanter positiver oder negativer oder verschwindender Krümmung spricht).

---

[1]) Vgl. Bd. 1, S. 151—155.

Man pflegt die Unterscheidung der dreierlei Arten von Biquaterionen (je nachdem $\varepsilon^2 = +1, -1$ oder 0 ist) auf Clifford zurückzuführen, der in einigen unvollendet gebliebenen Abhandlungen 1873 und 1876 hierüber sehr anregende, aber nicht abgeschlossene Bemerkungen hinterlassen hat (Werke, Nr. 20 und 42). Wie man die Bewegungen des Euklidischen Raumes vermöge (10) unter der Annahme $\varepsilon^2 = 0$ nach allen Richtungen bequem beherrschen kann, hat insbesondere Study untersucht (Math. Ann. 39, 1891). Genaueres über die nicht unbeträchtliche Literatur der Biquaternionen — gerade auch in ihrer Beziehung zu den orthogonalen Substitutionen von 4 Veränderlichen — findet man in dem Artikel I, 5 der französischen Enzyklopädie „Nombres complexes" von Study und Cartan (vgl. Nr. 35—36 daselbst)[1].

§ 3. Vom Ersatz der Maxwellschen Gleichungen durch Integralbeziehungen.

Die Quaternionen sind nur eines der Hilfsmittel, durch die man die Symmetrie der Maxwellschen Gleichungen bequem hervorkehren kann. Maxwell selbst hat in seinem Treatise, wie wir schon wiederholt bemerkten, überhaupt keine Differentialgleichungen hingeschrieben, sondern Integralbeziehungen aufgestellt — ein Verfahren, welches das Ergebnis der experimentellen Messungen zweifellos unmittelbarer zum Ausdruck bringt und überhaupt mancherlei Vorzüge hat, indem es z. B. den Fall einfacher im elektromagnetischen Felde auftretender Unstetigkeiten mit umfaßt. Von mathematischer Seite ist man, wie es scheint, erst neuerdings hierauf genauer eingegangen; ich beziehe mich insbesondere auf die schon genannte Arbeit von Bateman in (2) VII der Proceedings der London Mathematical Society von 1909/10.

Wir werden auch vielfache Integrale zu betrachten haben und schreiben sie in diesen Paragraphen unter Benutzung der Graßmannschen Stufen; so also, daß wir ein „Flächenelement" durch die Unterdeterminanten des aus 2 Reihen von Differentialen gebildeten Schemas:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \end{vmatrix}$$

[1] Ich verweise noch auf einen auch dort nur beiläufig genannten und sonst so gut wie unbekannten Geometer, den Wiesbadener Gymnasiallehrer Unverzagt. Schon 1871 beschäftigte er sich mit den Versuchen, die Quaternionenlehre für die allgemeinen Maßverhältnisse des Euklidischen R_3 fruchtbar zu machen, um dann mit einer ausführlichen Darstellung hervorzutreten (Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen, Wiesbaden 1876). Die Darstellung ist natürlich eine andere, meines Erachtens ungelenkere, als wir sie gewohnt sind. Niemand hat das Buch von Unverzagt damals beachtet. Es ist tragisch zu sehen, wie ein zweifellos hochbegabter Mann, dem die Verbindung mit Gleichstrebenden fehlte, zur Wirkungslosigkeit verurteilt gewesen ist.

festlegen, ein „Raumelement“ durch die entsprechende dreigliedrige Determinante, ein „Weltelement“ durch eine viergliedrige Determinante. Das Verhalten der Integrale bei Einführung neuer Veränderlichen läßt sich so bequemer verstehen, als bei der gewöhnlichen Schreibweise.

Sei beispielsweise ein vierfaches Integral (erstreckt über irgendein Weltstück) vorgelegt, das wir so schreiben:

$$(12)\qquad \iiiint f(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & \ldots & \ldots & d'x_4 \\ d''x_1 & \ldots & \ldots & d''x_4 \\ d'''x_1 & \ldots & \ldots & d'''x_4 \end{vmatrix}$$

Wir setzen nun etwa

$$(13)\qquad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

wobei $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ in $\bar{f}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ übergehen möge. Es ist dann ohne weiteres klar, daß das transformierte Integral lautet:

$$(14)\qquad \iiiint \bar{f}(y_1, y_2, y_3, y_4) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)} \begin{vmatrix} dy_1 & \ldots & dy_4 \\ d'y_1 & \ldots & d'y_4 \\ d''y_1 & \ldots & d''y_4 \\ d'''y_1 & \ldots & d'''y_4 \end{vmatrix},$$

unter $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)}$ die bezügliche Funktionaldeterminante verstanden. Handelt es sich bei (13) um eine Substitution der Lorentzgruppe, so ist diese Determinante gleich eins und wir haben insbesondere: *Ist $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine Invariante der Gruppe (ein „Skalar“), so auch das Integral; wir haben eine Integralinvariante der Gruppe.*

Analoge Bemerkungen werden bei dreifachen, zweifachen, einfachen Integralen am Platze sein. Ein dreifaches Integral wird sich so schreiben:

$$(15)\qquad \iiint \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & \ldots & \ldots & d'x_4 \\ d''x_1 & \ldots & \ldots & d''x_4 \end{vmatrix}$$

und wird Integralinvariante der Lorentzgruppe sein, wenn f_1, f_2, f_3, f_4 einen Vierervektor bezeichnet. Ein zweifaches Integral können wir so ansetzen:

$$(16)\qquad \iint \sum_{i,k} f_{ik}\,(dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k);$$

wir haben eine Integralinvariante der Lorentzgruppe, wenn die f_{ik} einen Sechsertensor vorstellen. Bei allgemeiner Substitution (13) aber wird hervorkommen:

$$(17)\qquad \iint \sum_{m,n} \bar{f}_{m,n}\,(dy_m\, d'y_n - d'y_m\, dy_n),$$

wo sich die $\bar{f}_{mn}$ aus den f_{ik} so zusammensetzen:

$$\bar{f}_{m,n} = \sum_{i,k} \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_k)}{\partial(y_m, y_n)} f_{ik} \tag{18}$$

(und in den f_{ik} die $x_1 \ldots x_4$ natürlich durch $y_1 \ldots y_4$ auszudrücken sind).

Hieran reihen sich die Sätze, welche man bei 3 Dimensionen nach *Gauß* und *Stokes* zu benennen pflegt und die in allgemeinster Form (für m-fache Integrale in n-fach ausgedehnten Räumen) z. B. bei Poincaré[1]) und Goursat[2]) aufgestellt sind. Ich will mich hier auf den Fall eines Doppelintegrals beschränken. Das Integral sei über eine geschlossene Fläche genommen, welche einen dreidimensionalen Raum einschließt. Das über die Fläche erstreckte Integral kann durch ein über den Raum erstrecktes dreifaches Integral ersetzt werden. Schreibt man, da f_{ik} ein Sechsertensor sein soll, λ_{ik} für f_{ik} und führt, wie früher, $\mu_{ik} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_{ik}}$ ein, so gilt die Formel:

$$\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik} \begin{vmatrix} dx_i & dx_k \\ d'x_i & d'x_k \end{vmatrix} = \iiint \begin{vmatrix} \sum_k \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial x_k} & \sum_k \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial x_k} & \sum_k \frac{\partial \mu_{3k}}{\partial x_k} & \sum_k \frac{\partial \mu_{4k}}{\partial x_k} \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'x_4 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''x_4 \end{vmatrix} \tag{19}$$

Es folgt, daß das Doppelintegral, erstreckt über eine beliebige geschlossene Fläche, immer 0 ist, wenn im ganzen R_4 die Differentialgleichungen bestehen:

$$\sum_k \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{3k}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{4k}}{\partial x_k} = 0.$$

Und auch den Rückschluß wird man machen können, wenn anders die λ_{ik} die dazu erforderlichen Stetigkeitsbedingungen erfüllen*.

Damit sind wir von selbst an die Maxwellschen Gleichungen herangekommen. In der Tat hatten wir diesen früher die Form gegeben:

$$\text{I.} \quad \sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{II.} \quad \sum_k \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Wir werden statt ihrer jetzt die Integralbeziehungen setzen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \iint \sum_{i,k} \mu_{ik} (dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k) = 0 \\ \text{II.} \iint \sum_{i,k} \lambda_{ik} (dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k) = 0, \end{array} \right. \tag{20}$$

die Integrale genommen über eine beliebige geschlossene Fläche. Und

[1]) Acta Mathematica 9 (1887).

[2]) Liouvilles Journal (6), Bd. 4 (1908).

damit haben wir ohne weiteres eine Einsicht in die Invarianz der Maxwellschen Gleichungen bei beliebiger Lorentztransformation, falls wir die λ_{ik} bzw. μ_{ik} als Bestimmungsstücke eines Sechsertensors ansehen (und dementsprechend transformieren). Wir finden aber auch mit leichter Rechnung, daß unsere Gleichungen bei beliebiger *konformer* Transformation der $x_1 \ldots x_4$, also bei der ganzen G_{15}, von der wir oben (B I, § 7, Ende) sprachen, ungeändert bleiben, nicht aber bei sonstigen Transformationen. Hierüber vergleiche man die S. 79 genannte Arbeit von Bateman.

§ 4. Das Viererpotential und der zu ihm gehörige Variationsansatz.

In unmittelbarer Verbindung mit den Entwicklungen des vorigen Paragraphen steht die Einführung des sogenannten *Viererpotentials* (q_1, q_2, q_3, q_4). Da unser invariantes Doppelintegral

$$\iint \sum_{i,k} \lambda_{ik} (dx_i\, d'x_k - d'x_i\, dx_k),$$

genommen über eine beliebige geschlossene Fläche, 0 ist, wird es, genommen über eine berandete Fläche, gleich einem längs des Randes erstreckten einfachen Integrale sein:

$$\int (q_1\, dx_1 + q_2\, dx_2 + q_3\, dx_3 + q_4\, dx_4), \tag{21}$$

woraus man nach dem verallgemeinerten Stokesschen Satze schließt, daß

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \operatorname{Rot} q \tag{22}$$

gesetzt werden kann (womit dann die Maxwellschen Gleichungen II identisch erfüllt sind). Dabei wird man, ohne die λ_{ik} zu ändern, die $q_1 \ldots q_4$ noch um $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}$ vermehren können, unter f eine beliebige Funktion der x verstanden, die den nötigen Eindeutigkeits- und Stetigkeitsbedingungen genügt. Infolgedessen kann man die q durch geeignete Wahl dieser Funktion der Bedingung unterwerfen, daß ihre Großdivergenz verschwindet:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{\partial q_4}{\partial x_4} = 0. \tag{23}$$

Die q haben dann gegenüber Lorentztransformationen, wegen der invarianten Bedeutung von (22), den Charakter von Vektorkomponenten.

Dieser ganze Ansatz, der außerordentliche formale Vereinfachungen bietet, ist im Keime schon bei Maxwell selbst vorhanden, voll hervorgekehrt aber wurde er erst, wie es scheint, 1898 von Liénard (Bd. 16 der Eclairage électrique). Aber natürlich noch in unsymmetrischer

Form, deren sich auch Lorentz in Nr. 4 seines Enzyklopädiereferates V,14 bedient, wenn er schreibt:

$$(24)\qquad \begin{aligned}(X, Y, Z) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi\,,\\ (L, M, N) &= \operatorname{rot} a\,,\end{aligned}$$

— unter a ein dreigliedriges „Vektorpotential" (a_1, a_2, a_3), unter φ ein Skalarpotential (des dreidimensionalen Raumes) verstanden. Schreibt man hier nach unsern früheren Festsetzungen

$$\begin{aligned} i\,X &= \lambda_{14}, \quad i\,Y = \lambda_{24}, \quad i\,Z = \lambda_{34},\\ L &= \lambda_{23}, \quad M = \lambda_{31}, \quad N = \lambda_{12},\end{aligned}$$

ferner für x, y, z, ict bzw. x_1, x_2, x_3, x_4 und nimmt endlich

$$(25)\qquad a_1, a_2, a_3, \varphi = -q_1, -q_2, -q_3, i\,q_4{}^{1)}\,,$$

so fällt man genau auf die Formeln (22) zurück. Diese symmetrischen Formeln sind natürlich von Minkowski eingeführt; man vergleiche seinen Vortrag vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vom Nov. 1907 [2]).

Wir tragen jetzt die Ausdrücke (22) in die Maxwellschen Gleichungen I ein. Wir erhalten dann die 4 Gleichungen:

$$(26)\qquad \Box q_i - \frac{\partial \operatorname{Div} q}{\partial x_i} = 0\,,$$

und daraus, indem wir (23) zu Hilfe nehmen:

$$(27)\qquad \Box\, q_i = 0\,.$$

Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes sind hiermit wohl auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht [3]).

Ein weiterer Schritt ist, daß wir die Maxwellschen Gleichungen I:

$$\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

in einen *Variationsansatz* zusammenziehen. Wir haben zu schreiben:

$$(28)\qquad \delta \iiiint \sum_{i,k} \lambda_{ik}^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0\,{}^{4)},$$

wo

$$\lambda_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$$

---

1) Die Minuszeichen bei q_1, q_2, q_3 entsprechen dem Umstande, daß Lorentz ein Rechtskoordinatensystem (x, y, z) benutzt, wir aber im Anschluß an Hertz ein Linkskoordinatensystem.

2) Siehe S. 74.

3) Man beachte die formale Analogie mit S. 61, Formel (3) und (4). (H.)

4) Wir kehren zur üblichen Bezeichnung des Volumelements durch $dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_n$ zurück.

zu setzen ist und die Variation so gebildet werden soll, daß wir die $q_1 \ldots q_4$ um beliebige $\delta q_1 \ldots \delta q_4$ ändern (die nur an den Grenzen verschwinden müssen, was durch die Horizontalstriche beim Integralzeichen angedeutet wird). In der Tat finden wir die Variation δJ unseres Integrals nach den gewöhnlichen Regeln:

$$\delta J = \overline{\iiiint} \left[\sum_i \delta q_i \left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i} \right) \right] d x_1 d x_2 d x_3 d x_4 , \tag{29}$$

was sofort zu den Maxwellschen Gleichungen I führt.

Die Invarianz der Maxwellschen Gleichungen gegenüber Lorentztransformationen liegt hier ohne weiteres zutage, weil $\sum\limits_{i,k} \lambda_{ik}^2$ gegenüber diesen Transformationen ein Skalar ist. Aber auch die zwischen ihnen bestehende differentielle Abhängigkeit:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_k} \right) = 0$$

erkennt man unmittelbar. Die λ_{ik} bleiben doch ungeändert, wenn man die q_i um irgendwelche $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ vermehrt. Schreibt man dementsprechend in die Variation (29) für die δq_i die Werte $\frac{\partial \delta f}{\partial x_i}$, so bekommt man die identische Gleichung:

$$\overline{\iiiint} \left[\sum_i \frac{\partial \delta f}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_i} \right) \right] d x_1 \, d x_2 \, d x_3 \, d x_4 = 0 \, ;$$

durch Umgestaltung vermöge partieller Integration für ein beliebiges δf ergibt das:

$$\overline{\iiiint} \delta f \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial q_k} \right) \right] d x_1 \, d x_2 \, d x_3 \, d x_4 = 0 \, ,$$

wo nun die genannte Abhängigkeit hervorleuchtet.

Es ist interessant, diesen völlig symmetrischen Variationsansatz mit dem unsymmetrischen zu vergleichen, den wir Bd. 1, Kap. V nach Mac Cullagh gaben. Wir haben, um letzteren zu bekommen, in unseren nunmehrigen Entwicklungen nur $q_4 = 0$ zu setzen (was an sich keine Einschränkung ist, aber nur die Variationen δq_1, δq_2, δq_3 zur Geltung kommen läßt).

Variationsansätze sind immer besonders brauchbar, wenn es sich um Einführung neuer Veränderlicher handelt. Diese Regel wollen wir noch benutzen, um uns zu überzeugen, daß die Maxwellschen Gleichungen bei der allgemeinsten konformen Transformation der $x_1 \ldots x_4$, also bei der ganzen G_{15}, welche

$$(d x_1^2 + \cdots + d x_4^2) = \varrho^2 (d y_1^2 + \cdots + d y_4^2) \qquad (\varrho \neq 0) \tag{30}$$

bewirkt, invariant sind. Unser Beweis beruht einfach darauf, daß der Variationsansatz (28):

$$\delta \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \sum_{i,k} \lambda_{ik}^2 \cdot dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4' = 0$$

bei beliebiger konformer Transformation nicht geändert wird.

Sei, wie in (13),

$$x_i = \varphi_i\,(y_1, y_2, y_3, y_4)\,.$$

Dann ist zunächst, wie seinerzeit Jacobi darlegte, und wir in (12), (14) vermöge der Graßmannschen Schreibweise des Differentials noch anschaulich gemacht haben,

(31) $$dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \cdot dx_4 \quad \text{durch} \quad D \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot dy_3 \cdot dy_4$$

zu ersetzen, unter D die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_4)}{\partial(y_1 \ldots y_4)}$$

verstanden.

Bleibt zu untersuchen, wie sich

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}^2 = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \right)^2$$

umsetzt.

Wir haben zunächst für die dx_i die homogenen linearen Substitutionen:

(32) $$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\, dy_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_4}\, dy_4$$

(deren Determinante eben die Funktionaldeterminante D ist). Die Operation $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_4}$ und ebenso die q_i verhalten sich natürlich zu den dx_i kontragredient (letzteres, weil $q_1 dx_1 + \cdots + q_4 dx_4$ invariant sein soll). Wir haben beispielsweise (indem wir die transformierten q durch Horizontalstriche bezeichnen):

(33) $$\bar{q}_i = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}\, q_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_i}\, q_4\,.$$

Es kommt nun darauf an, die transformierten λ, also die Größen

(34) $$\bar{\lambda}_{ik} = \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial y_i} - \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial y_k}$$

zu berechnen. Man könnte zunächst meinen, daß in die Formeln die zweiten Differentialquotienten der φ nach den y eingingen. Aber die Rechnung zeigt, daß sich die betreffenden Terme gerade wegheben. Alles geht vor sich, wie wenn die Koeffizienten der linearen Substitutionen (32), (33) konstant wären. Insofern sind wir, wie früher, im Bereich der elementaren Invariantentheorie: die λ_{ik} verhalten sich wie die Determinanten aus zwei Reihen zu den dx kontragredienter Größen.

Wir sind sogar im Bereich der orthogonalen Substitutionen, nur daß $\sum dx_i^2$ vermöge (30) nicht in $\sum dy_i^2$, sondern eben in $\varrho^2 \sum dy_i^2$ übergeführt wird. Eine kurze Überlegung zeigt, daß die Substitutionsdeterminante D nun nicht ± 1, sondern $\pm \varrho^4$ ist, daß andererseits $\Sigma \lambda_{ik}^2$ in $\sum \bar{\lambda}_{ik}^2 : \varrho^4$ übergeht. Die beiden unter dem Integralzeichen hinzutretenden Potenzen von ϱ kompensieren sich also gerade gegenseitig und das Integral bleibt bis auf einen etwaigen Vorzeichenwechsel ungeändert. Dieser Vorzeichenwechsel ist aber bedeutungslos, wenn wir die Variation des Integrals $= 0$ setzen wollen. Die Maxwellschen Gleichungen bleiben also in der Tat ungeändert.

§ 5. Beispiele für die Anwendung unserer Viereranalysis auf besondere Probleme.

Wir haben als Transformationsgruppen, welche die Maxwellschen Gleichungen invariant lassen:

1. die Lorentzgruppe,
2. diese umfassend die konforme G_{15},

und es entsteht die Frage, welchen Nutzen wir hieraus ziehen können.

In allen solchen Fällen bieten sich für das mathematische Denken zwei Stufen:

a) die Benutzung der Transformationen, um aus bekannten Beziehungen neue zu machen,

b) die Entwicklung der Denkgewohnheiten bis zu dem Grade der Abstraktion, daß man nur noch auffaßt, was bei der Gruppe invariant ist. Dieser Entwicklungsprozeß wurde am Beispiel der neueren Geometrie, was die projektiven Umformungen des Raumes angeht, schon in Bd. 1, Kap. IV geschildert: der durchgebildete Projektiviker läßt alle die Übertragungen durch Projektion, welche frühere Geometer vollzogen und als wesentliche Resultate ansahen, nur mehr als Selbstverständlichkeiten gelten; sie sind für ihn verschiedene Fassungen desselben Grundgedankens.

Genau die beiden Stufen sind bei der Lorentzgruppe, wie schon oben angedeutet, durchlaufen worden. Ursprünglich — bei Lorentz selbst, bei Larmor u. a. — nur ein Hilfsmittel im Sinne von a), wurde sie durch Poincaré und vor allem durch Einstein und Minkowski die Grundlage einer neuen, dem Standpunkt b) entsprechenden „Weltanschauung".

Anders bei der G_{15}, die überhaupt noch nicht viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat. Sie ist bisher nur im Sinne von a) benutzt worden, und das Gefühl der Physiker, die ich danach fragte, sträubte sich durchaus dagegen, den Übergang zu b) zu vollziehen.

Dem referierenden Charakter dieses Buches entsprechend werde auch ich weiterhin fast ausschließlich die G_{10} behandeln; dabei will ich nicht erst Kompromisse mit dem überkommenen dreidimensionalen Denken schließen, sondern der jeweilige vierdimensionale Ansatz soll von vornherein in seiner ganzen Einfachheit zur Geltung gebracht werden.

Sprechen wir in diesem Paragraphen von der Verwendung der Lorentzgruppe im Sinne a). Ich werde nur zwei Aufgaben heranbringen, die beide ein einzelnes Elektron betreffen. Seine jeweiligen Koordinaten mögen mit $x_1 \ldots x_4$ bezeichnet sein. Wir müssen dann, um nicht unsymmetrisch zu sein, den Begriff der Geschwindigkeit fallen lassen (welcher eine Bevorzugung des x_4 implizieren würde). Vielmehr wollen wir $x_1 \ldots x_4$ nach dem invarianten Bogenelement

$$(35) \qquad ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}$$

differenzieren und den Inbegriff der Differentialquotienten:

$$(36) \qquad \frac{dx_1}{ds} = x_1', \ \ldots, \ \frac{dx_4}{ds} = x_4'$$

als Richtungsvektor bezeichnen; selbstverständlich ist dabei

$$(37) \qquad x_1'^2 + \cdots + x_4'^2 = 1\,.$$

Wir kommen der gewöhnlichen Auffassung entgegen, wenn wir durch geeignete Lorentztransformationen im einzelnen Augenblicke

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad \text{und ebenso} \quad x_1' = x_2' = x_3' = 0$$

machen, wobei $x_4' = +1$ genommen sein soll. Minkowski nannte dieses Nullsetzen der 3 ersten Richtungskomponenten: *das Elektron auf Ruhe transformieren.* Wir ziehen dann für ein solches ruhendes Elektron die traditionellen physikalischen Kenntnisse heran, um aus ihnen mittels einer beliebigen Lorentztransformation allgemeinere Gesetze herzuleiten.

Erste Aufgabe: *Einwirkung eines gegebenen elektromagnetischen Feldes auf ein beliebig bewegtes Elektron.*

Gegeben sind die λ_{ik}, die mit den gewöhnlich gebrauchten X, Y, Z, L, M, N nach unseren früheren Festsetzungen so zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \varepsilon X &= \lambda_{14}, \quad \varepsilon Y = \lambda_{24}, \quad \varepsilon Z = \lambda_{34}, \qquad (\varepsilon = \sqrt{-1}) \\ L &= \lambda_{23}, \quad M = \lambda_{31}, \quad N = \lambda_{12}. \end{aligned}$$

Wir bilden uns daraus den Begriff der *Viererkraft*, d. h. eines auf das Elektron wirkenden Vierervektors, dessen drei erste Komponenten P_1, P_2, P_3 den Kraftkomponenten der gewöhnlichen Mechanik entsprechen sollen, während die vierte, P_4, so zu berechnen sein wird, daß alleweil

$$(38) \qquad x_1' P_1 + x_2' P_2 + x_3' P_3 + x_4' P_4 = 0$$

sein soll. Für ein ruhendes Elektron von der Ladung e haben wir dann gemäß den traditionellen physikalischen Gesetzen im gegebenen elektromagnetischen Felde die Viererkraft anzuschreiben:

$$P_1 = e X, \quad P_2 = e Y, \quad P_3 = e Z, \quad P_4 = 0, \tag{39}$$

also in den λ_{ik}:

$$P_1 = -\varepsilon e \lambda_{14}, \; P_2 = -\varepsilon e \lambda_{24}, \; P_3 = -\varepsilon e \lambda_{34}, \; P_4 = 0. \tag{39'}$$

Ferner werde postuliert, daß bei einem bewegten Elektron die Viererkraft nur noch von den ersten Differentialquotienten $x_1' \ldots x_4'$ abhängt, und zwar linear. Dann ist klar, daß die Formeln (39) als Spezialfall folgenden allgemeinen Ansatzes anzusehen sind:

$$P_1 = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{1k} x_k', \quad \ldots, \quad P_4 = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{4k} x_k' \text{ [1]}. \tag{40}$$

Hiermit ist unsere Aufgabe bereits gelöst; wir wollen aber noch einiges wenige über die Bewegung des Elektrons im gegebenen Kraftfelde sagen. Nach Analogie mit der gewöhnlichen Mechanik setzen wir an (unter m die träge Masse verstanden, die mit dem Elektron verbunden ist):

$$m x_i'' = P_i = -\varepsilon e \sum_k \lambda_{ik} x_k'. \tag{41}$$

Drückt man hier die λ_{ik} durch das Viererpotential q des Feldes aus, so lassen sich diese Differentialgleichungen wieder elegant in einen Variationsansatz zusammenziehen (der dem Hamiltonschen Prinzip der gewöhnlichen Mechanik entspricht):

$$\delta \overline{\underline{\int}} \left(\frac{m}{2} \sum_i x_i'^2 + \varepsilon e \sum_i q_i x_i' \right) ds = 0, \tag{42}$$

(die x_i sind zu variieren; die Horizontalstriche beim Integralzeichen sollen, wie früher, andeuten, daß die Variationen an den Integralgrenzen verschwinden). In der Tat, bilden wir aus (42) nach den allgemeinen Regeln der Variationsrechnung die Gleichungen

$$\frac{d \dfrac{\partial(\;)}{\partial x_i'}}{ds} - \frac{\partial(\;)}{\partial x_i} = 0,$$

so fallen wir genau auf die Formeln (41) zurück. — Da $\sum x_i'^2 = 1$ ist, können wir das Prinzip (42) auch durch das folgende ersetzen, welches für bestimmte Auffassungen Vorteile bietet,

$$\delta \overline{\underline{\int}} \left(m \sqrt{\sum_i x_i'^2} + \varepsilon e \sum_i q_i x_i' \right) ds = 0. \tag{43}$$

---

[1] Denn nach (13) S. 81 stellt (40) jedenfalls einen Vektor $P_1, \ldots, P_4$ dar, und $\sum_{i=1}^{4} x_i' P_i$ ist invariant. Für das spezielle System $x_1' = x_2' = x_3' = 0$, $x_4' = 1$ haben die Komponenten die durch (39') gegebenen Werte, die $\sum_{i=1}^{4} x_i' P_i = 0$, also (38), erfüllen. Folglich gilt (38) in jedem System.

Hier sind alle Terme homogen erster Ordnung in den x_i', wir können also auch schreiben:

$$(43') \qquad \delta \overline{\underline{\int}} \left(m \sqrt{\sum_i d x_i^2} + \varepsilon e \sum_i q_i \, d x_i \right) = 0 \,.$$

Zweite Aufgabe: *Von dem elektromagnetischen Felde eines gleichförmig bewegten Elektrons.*

Ich will, um nicht zu viele Indizes nebeneinander schreiben zu müssen, statt x_1, x_2, x_3, x_4 wieder x, y, z, l setzen, und für x_1', x_2', x_3', x_4', kurzweg $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (wobei natürlich $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$ ist). Ein Elektron wird gleichförmig bewegt heißen, wenn es im R_4 eine gerade Linie beschreibt, wenn also seine Koordinaten sich in die Gestalt setzen lassen:

$$(44) \qquad x_0 + s\alpha, \quad y_0 + s\beta, \quad z_0 + s\gamma, \quad l_0 + s\delta \,.$$

Zwecks Bestimmung des Feldes suchen wir das zugehörige Viererpotential auf.

Wieder wählen wir als Ausgangspunkt des Elektrons zunächst den Koordinatenanfangspunkt und transformieren auf Ruhe, setzen also

$$x_0 = y_0 = z_0 = l_0 = 0; \quad \alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \delta = 1 \,.$$

In diesem Koordinatensystem mögen die laufenden Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{l}$ heißen. Den elementaren physikalischen Anschauungen wird dann folgendes Viererpotential entsprechen:

$$(45) \qquad \bar{q}_x = 0 \,, \quad \bar{q}_y = 0 \,, \quad \bar{q}_z = 0 \,, \quad \bar{q}_l = - \frac{\varepsilon e}{\bar{r}} \,,$$

wo $\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{l}^2}$ und $\varepsilon = \sqrt{-1}$ ist. In der Tat sind dadurch die Gleichungen

$$\Box \bar{q}_x = \cdots = \Box \bar{q}_z = 0 \,, \quad \operatorname{Div} \bar{q} = 0$$

erfüllt. Nun berechnen wir aus (22) S. 91 die Komponenten des elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= - \varepsilon \bar{\lambda}_{14} = \frac{e \bar{x}}{\bar{r}^3} \,, & \bar{Y} &= - \varepsilon \bar{\lambda}_{24} = \frac{e \bar{y}}{\bar{r}^3} \,, & \bar{Z} &= - \varepsilon \bar{\lambda}_{34} \frac{e \bar{z}}{\bar{r}^3} \,, \\ \bar{L} &= 0 \,, & \bar{M} &= 0 \,, & \bar{N} &= 0 \,, \end{aligned}$$

was mit der traditionellen Auffassung übereinstimmt.

Es kommt jetzt nur darauf an, das Viererpotential (45) auf den allgemeinen Fall der Gleichungen (44) zu übertragen. Ich behaupte, daß die Lösung die folgende ist:

$$(46) \qquad q_x = - \frac{\varepsilon e \alpha}{R} \,, \quad q_y = - \frac{\varepsilon e \beta}{R} \,, \quad q_z = - \frac{\varepsilon e \gamma}{R} \,, \quad q_l = - \frac{\varepsilon e \delta}{R} \,,$$

wo R sich so darstellt:

$$(46') \qquad R = + \sqrt{((x - x_0)^2 + \cdots + (l - l_0)^2) - (\alpha (x - x_0) + \cdots + \delta (l - l_0))^2} \,.$$

Zum Beweise genügt es zu bemerken, daß (46) einen Vierervektor festlegt (weil R aus lauter Skalaren zusammengesetzt ist), und daß (46) in speziellen Fällen in (45) übergeht. Man wird übrigens R, wie man im besonderen Falle leicht sieht, als senkrechten Abstand des Punktes x, y, z, l von der vom Elektron beschriebenen Weltgeraden (44) interpretieren können.

Der auf der Weltgeraden zufällig herausgegriffene Punkt x_0, y_0, z_0, l_0 spielt in (46), (46′) keine besondere Rolle. Denn man sieht, daß R sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$R = \sqrt{\sum p_{0ik}^2},$$

wo die p_{0ik} die zweigliedrigen Determinanten des Schemas

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & l-l_0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

sind, die ihrerseits gewiß ungeändert bleiben, wenn man x_0, y_0, z_0, l_0 durch die allgemeinen Ausdrücke (44) ersetzt.

Man kann diesen Umstand benutzen, um die Formeln (46), (46′) noch zu vereinfachen. Man wähle nämlich den Punkt x_0, y_0, z_0, l_0 auf der Weltgeraden so, daß

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (l-l_0)^2 = 0\,[1].$$

Dann wird

$$(47) \qquad q_x = -\frac{e\alpha}{P}, \qquad q_y = -\frac{e\beta}{P}, \qquad q_z = -\frac{e\gamma}{P}, \qquad q_l = -\frac{e\delta}{P},$$

wo

$$(47') \qquad P = (\alpha\,(x-x_0) + \beta\,(y-y_0) + \gamma\,(z-z_0) + \delta\,(l-l_0)).$$

Das so geschriebene Resultat ist ein besonderer Fall der Formeln, welche Liénard 1898 (Bd. 16 der Eclairage électrique) und unabhängig von ihm Wiechert 1900 (Archives Neerlandaises, 1900, S. 549) für das Viererpotential eines beliebigen gewählten (punktförmig gedachten) Elektrons aufgestellt haben; wir kommen auf diese Formeln zurück (S. 115).

Die behandelten beiden Beispiele mögen für die Verwendung der Lorentzgruppe G_{10} in dem oben mit a) bezeichneten Sinne genügen. Wollte man, bei unserm zweiten Beispiel, statt ihrer die konforme G_{15} verwenden, so würde man den Fall eines Elektrons erhalten, welches sich im R_4 der x, y, z, l auf einem Kreise, im Raum der x, y, z, t daher auf einer Hyperbel bewegt, deren Asymptoten zwei Erzeugenden des Kegels $dx^2 + \cdots - c^2dt^2 = 0$ parallel laufen. Es ist dies der Fall der von Born so genannten „Hyperbelbewegung" (eines Elektrons). — Ich muß es mit dieser Andeutung hier bewenden lassen. —

[1] Hierdurch ist x_0, y_0, z_0, l_0 erst bis auf ein unbestimmtes Vorzeichen festgelegt, eine eindeutige Verabredung werden wir im nächsten Abschnitt treffen.

§ 6. Die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe.

Wir haben nun den Punkt b) des vorigen Paragraphen etwas auszuführen. Von Bedeutung soll also nur noch sein, was gegenüber der Lorentzgruppe invariant ist; etwa, daß ein Skalar einen bestimmten Zahlenwert hat, daß ein Vierervektor oder ein Zehnertensor oder die Vektordivergenz eines Zehnertensors identisch verschwindet usw. Alle Aussagen der Physik müssen so zusammengefaßt werden, daß sie diesen Charakter haben. Das ist die eigentlich relativistische Denkweise, welche wir als das Endergebnis der Theorie anzusehen haben.

Die physikalischen Entwicklungen der gegenwärtigen Darstellung gehen leider nicht weit genug, um hierfür eine größere Zahl von Beispielen zu haben.

So werde hier nur betont, daß gegenüber der traditionellen Auffassung der Physik, was sonst als Skalar erschien, jetzt entweder ein Skalar bleiben, oder die vierte Komponente eines Vierervektors, oder die letzte Komponente eines Zehnertensors sein kann (wie man sofort sieht, wenn man die Lorentz-G_{10}, indem man $l' = l$ setzt, auf die gewöhnliche Euklidische G_6 reduziert; die vierte Komponente eines Vierervektors und die letzte Komponente eines Zehnertensors werden dadurch etwas für sich stehendes).

Skalare bleiben z. B. die Masse m und die Ladung e (eines Elektrons), wenn wir sie so einführen, wie dies in (41) des vorigen Paragraphen geschehen ist.

Komponente eines Vierervektors wird das skalare Potential des elektromagnetischen Feldes (das φ der Formel (24) in § 4), Komponente eines Zehnertensors (wie schon am Schluß von § 1 erwähnt) seine spezifische Energie.

Diesen besonders wichtigen Zehnertensor (Formel (17) des § 1) möchte ich noch, damit die Verbindung mit der traditionellen Physik klarer zutage tritt, in den Komponenten X, Y, Z, L, M, N anschreiben, unter Abspaltung des Faktors εc aus den Gliedern der letzten Horizontal- und Vertikalreihen. Er lautet dann so:

$$(48)\quad \left(\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} L^2-M^2-N^2 \\ +X^2-Y^2-Z^2 \end{pmatrix} & LM+XY & LN+XZ & \frac{NY-MZ}{c} \\
LM+XY & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M^2-N^2-L^2 \\ +Y^2-X^2-Z^2 \end{pmatrix} & MN+YZ & \frac{LZ-NX}{c} \\
LN+XZ & MN+YZ & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} N^2-L^2-M^2 \\ +Z^2-X^2-Y^2 \end{pmatrix} & \frac{MX-LY}{c} \\
\hline
\frac{NY-MZ}{c} & \frac{LZ-NX}{c} & \frac{MX-LY}{c} & -\frac{1}{2c^2}\begin{pmatrix} L^2+M^2+N^2 \\ +X^2+Y^2+Z^2 \end{pmatrix}
\end{array}\right)$$

Seine Komponenten sind zu

$$dx^2,\ 2\,dx\,dy,\ dy^2, \ldots,\ dt^2$$

kontragredient. Ich habe die Terme durch Querstriche gleich so voneinander abgetrennt, wie es die traditionelle physikalische Auffassung verlangt:

Der letzte Term bedeutet, wie schon gesagt — jetzt mit umgekehrtem Vorzeichen — *die spezifische Energie.*

Die 3 anderen Terme der letzten Horizontal- oder Vertikalreihe werden wir als *elektromagnetischen Impuls* bezeichnen.

Die ersten neun Terme aber sind das, was man sonst die Maxwellschen Spannungen des Mediums nannte.

Nun war doch eine wesentliche Eigenschaft das Zehnertensors (48), daß seine Vektordivergenz identisch verschwand.

Für die vierte Horizontalreihe schreibt sich das jetzt so:

$$(49) \qquad \frac{\partial\left(\frac{NY - MZ}{c}\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L^2 + M^2 + N^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}{2c^2}\right)$$

Dies drückt in der Form, welche Poynting zuerst gegeben hat (Phil. Transactions 1884) das *Gesetz der Erhaltung der Energie* aus: Die Impulskomponenten sind als „Strömungskomponenten" der Energie anzusehen (weshalb man auch von einem Poyntingstrom redet).

Aber zugleich ergibt sich hier, daß dieser Satz nur einer von 4 koordinierten ist; die drei andern besagen, daß entsprechend die Maxwellschen Spannungen der einzelnen Horizontalreihe als Strömungskomponenten der einzelnen Impulskomponente anzusehen sind.

Der Energiesatz und die drei Impulssätze verschmelzen also wieder zu einer Einheit, wie dies für das Gebiet der klassischen Mechanik schon in A, § 2 gezeigt (oder in Aussicht gestellt) wurde.

Genug dieser allgemeinen Auseinandersetzungen! — Wir älteren Forscher vollziehen die innere Umschaltung der physikalischen Auffassung, wie sie die konsequente Relativitätstheorie der Lorentzgruppe verlangt, immer nur mit einer gewissen Mühe; es ist die Aufgabe der jüngeren Generation, vollends in die neue Denkweise hineinzuwachsen [1]).

[1]) Es fragt sich, ob die Relativitätstheorie der konformen Gruppe G_{15} für das physikalische Denken jemals dieselbe Rolle spielen wird. Ich glaube dies nicht. Die Lorentzgruppe hat bei allen Abweichungen im einzelnen immer noch eine gewisse Verwandtschaft zur Galilei-Newton-Gruppe der klassischen Theorie, die sich am deutlichsten darin ausspricht, daß letztere als Grenzfall der ersteren für den Fall unendlich großer Lichtgeschwindigkeit anzusehen ist (Siehe S. 87, § 2). Der Übergang zur Relativitätstheorie der konformen G_{15} würde viel radikaler wirken. Man bedenke nur, daß die G_{15} jede beliebige Tranformation durch reziproke Radien in sich begreift, daß es also bei ihr möglich ist, jeden beliebigen Raum-Zeitpunkt x_0, y_0, z_0, t_0 ins Unendliche zu werfen. — Eben deshalb (weil sie den Unterschied des Endlichen und des Unendlichweiten aufhebt) hat auch die Denkweise der projektiven Geometrie in der Physik keine rechte Wurzel schlagen können.

III. Hervorkehrung der Realitätsverhältnisse der Lorentzgruppe.

Wir haben uns jetzt mit den Festsetzungen und Umänderungen zu befassen, die nötig sind, wenn wir für x, y, z, l wieder $x, y, z, \varepsilon c t$ setzen (unter c die Lichtgeschwindigkeit verstanden) und uns dann auf reelle Werte der x, y, z, t beschränken. Den Inbegriff dieser reellen x, y, z, t nennen wir mit Minkowski die *Welt*.

§ 1. Einleitendes.

1. Die fundamentale quadratische Form, deren Invarianz die homogenen Lorentztransformationen bestimmt, heißt jetzt:

(1) $$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2.$$

Indem wir $\sqrt{f}$ als *Entfernung* zweier Weltpunkte bezeichnen, erhalten wir für den Abstand ds zweier unendlich naher Punkte:

(2) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$ [1])

Neben die *Länge* des Bogenelementes ds setzen wir — dem indefiniten Charakter der quadratischen Form entsprechend — zweckmäßigerweise seine *Dauer* $d\tau$. Wir setzen:

(3) $$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}.$$

2. Kogredienz und Kontragredienz fallen jetzt nicht mehr genau zusammen. Wir haben nämlich als Skalar jedenfalls die Polare der Differentialform (2):

(4) $$dx\, d'x + dy\, d'y + dz\, d'z - c^2\, dt\, d't.$$

Andererseits möge die Linearform

(5) $$u\, d'x + v\, d'y + w\, d'z + \bar{w}\, d't$$

ein Skalar sein. Die zu dx', dy', dz', dt', also auch zu dx, dy, dz, dt kontragredienten $u, v, w, \bar{w}$, substituieren sich ersichtlich wie $dx, dy, dz, -c^2 dt$. Für sie gilt als fundamentale quadratische Form:

(6) $$u^2 + v^2 + w^2 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}.$$

Wir müssen dementsprechend jetzt durchweg zweierlei (zueinandre duale) Vierervektoren unterscheiden.

[1]) Natürlich kann man diese Differentialform an die Spitze stellen, was die Schreibweise abkürzt; ich betone aber, daß wir es bei der Lorentzgruppe noch mit den algebraischen Ansätzen der elementaren Invariantentheorie, also mit den Auffassungen von Graßmann-Cayley zu tun haben, und es keinen Zweck hat, mit Riemann ein allgemeines $ds^2 = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ (mit „irgendwie" von den x abhängenden a_{ik}) an die Spitze zu stellen.

3. Insbesondere werden die Symbole

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

jetzt zu den dx, dy, dz, dt kontragredient sein. So lautet der Skalar erster Ordnung, den wir aus einem gegebenen Skalar f ableiten können, jetzt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \tag{7}$$

und mit $\square$ wird der Differentialoperator 2. Ordnung zu bezeichnen sein:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Die Großdivergenz eines Vektorfeldes 2. Art aber wird lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \text{Div}\,(u). \tag{9}$$

4. Die früheren orthogonalen Substitutionen:

$$d'x = \alpha_{11}\,dx_1 + \alpha_{12}\,dx_2 + \alpha_{13}\,dx_3 + \alpha_{14}\,dx_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

schreiben sich jetzt folgendermaßen:

$$\begin{aligned} d'x &= \alpha_{11}\,dx + \alpha_{12}\,dy + \alpha_{13}\,dz + \varepsilon c\,\alpha_{14}\,dt, \\ d'y &= \alpha_{21}\,dx + \alpha_{22}\,dy + \alpha_{23}\,dz + \varepsilon c\,\alpha_{24}\,dt, \\ d'z &= \alpha_{31}\,dx + \alpha_{32}\,dy + \alpha_{33}\,dz + \varepsilon c\,\alpha_{34}\,dt, \\ d't &= \frac{\alpha_{41}\,dx + \alpha_{42}\,dy + \alpha_{43}\,dz}{\varepsilon c} + \alpha_{44}\,dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Da wir die Lorentzgruppe fortan auf *reelle* Substitutionen der x, y, z, t beschränken, so müssen $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ und $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ rein imaginär, die übrigen α_{ik} reell genommen werden, wie man leicht durch Einsetzen spezieller Wertsysteme $dx, \ldots, dt$ erkennt.

Die independente Darstellung der so definierten homogenen Lorentzsubstitution durch Biquaternionen ergibt sich aus § 2 des vorigen Abschnittes folgendermaßen: Sei

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{-1}}{c}.$$

Seien ferner Q_1, Q_2 reelle Quaternionen[1]):

$$Q_1 = iA_1 + jB_1 + kC_1 + D_1,$$
$$Q_2 = iA_2 + jB_2 + kC_2 + D_2,$$

[1]) D. h. $A_1, \ldots, D_2$ reell.

welche der „Orthogonalitätsbedingung" unterliegen:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 + D_1 D_2 = 0\,.$$

Dann schreiben sich die Substitutionen (10) in der Form:

$$(11)\qquad (d't + \varepsilon\,(i\,d'x + j\,d'y + k\,d'z))\,(Q_1 - \varepsilon\,Q_2) = (Q_1 + \varepsilon\,Q_2)\,(dt + \varepsilon\,(i\,dx + j\,dy + k\,dz))\,.$$

5. Sprechen wir jetzt vom Viererpotential q_x, q_y, q_z, q_t und der dadurch ermöglichten Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen. Unsere neuen q werden als Vektor 2. Art anzusehen sein, weil doch, wie auf S. 91 bemerkt, $q_x dx + q_y dy + q_z dz + q_t dt$ skalar sein soll. Die Beziehung zu den früheren q_1, q_2, q_3, q_4 ist also:

$$(12)\qquad q_x = q_1,\quad q_y = q_2,\quad q_z = q_3,\quad q_t = \varepsilon c q_4\,.$$

Die Divergenzbedingung lautet:

$$(13)\qquad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial q_t}{\partial t} = 0\,.$$

Die elektromagnetischen Feldgrößen sind jetzt durch die Determinanten des Schemas

$$\left|\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\varepsilon c\,\partial t} \\[2ex] q_x & q_y & q_z & \dfrac{q_t}{\varepsilon c} \end{array}\right|$$

gegeben. Berücksichtigen wir, daß wir

$$\lambda_{14} = \varepsilon X,\quad \lambda_{24} = \varepsilon Y,\quad \lambda_{34} = \varepsilon Z,\quad \lambda_{23} = L,\quad \lambda_{31} = M,\quad \lambda_{12} = N$$

gesetzt haben, so ergibt sich:

$$(14)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{\partial q_x}{c\,\partial t} - \frac{\partial q_t}{c\,\partial x},\quad \ldots, \\ L &= \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z},\quad \ldots, \end{aligned}$$

was mit den auf S. 92 angegebenen Formeln von Lorentz übereinstimmt, wenn wir sein (dreidimensionales) Vektorpotential $a = -(q_x, q_y, q_z)$ und sein „skalares" Potential $\varphi = \frac{q_t}{c}$ setzen (siehe Formel (25) ebenda). Für unsere neuen q aber gelten außer (13) die Gleichungen:

$$(15)\qquad \Box q_x = 0,\quad \Box q_y = 0,\quad \Box q_z = 0,\quad \Box q_t = 0,$$

unter $\Box$ den Operator (8) verstanden.

§ 2. Geometrische Hilfsvorstellungen.

Wir werden nun mit Minkowski, aber vielfach über ihn hinausgehend, die „vierdimensionale Welt" der x, y, z, t durch gewisse geometrische Hilfsvorstellungen beleben.

a) Algebraische Beziehungen [1]).

1. Entsprechend der Formel (1) des vorigen Paragraphen läuft von jedem Punkte x_0, y_0, z_0, t_0 ein „Hyperkegel“

(1) $$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0$$

aus. Alle diese Kegel sind „parallel gestellt“; sie schneiden den unendlich fernen R_3 unserer vierdimensionalen Welt in demselben *fundamentalen Gebilde.* Um dies reinlich darzustellen, führen wir vorübergehend homogene Koordinaten sein, indem wir setzen:

(2) $$x = \frac{\xi_1}{\xi_5}, \quad y = \frac{\xi_2}{\xi_5}, \quad z = \frac{\xi_3}{\xi_5}, \quad t = \frac{\xi_4}{\xi_5}.$$

Das betreffende Gebilde wird dann durch die Zusammenstellung der beiden Gleichungen dargestellt sein:

(3) $$\xi_5 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - c^2 \xi_4^2 = 0,$$

in (kontragredienten) Ebenenkoordinaten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ werden wir mit der einen Gleichung von verschwindender Determinante:

(4) $$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0$$

ausreichen. Für alle Realitätsverhältnisse maßgebend ist die in diesen Gleichungen auftretende Vorzeichenkombination. Wir werden unser Fundamentalgebilde (3) dementsprechend als Ellipsoid bezeichnen. Die Hyperkegel $f =$ const enthalten alle dieses Ellipsoid und sind eben dadurch gekennzeichnet.

2. Anschaulicher wird dieses Sachverhältnis, wenn wir um eine Dimension herabsteigen und uns etwa auf $z = z_0$ beschränken, x, y, t aber als rechtwinklige Koordinaten eines R_3 interpretieren. Wir haben dann lauter Rotationskegel:

(5) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0.$$

Sie haben zur t-Achse parallele Rotationsachsen, und wir dürfen sie, wenn wir das Zentimeter und die Sekunde als Einheiten zugrunde legen, als *sehr flach* bezeichnen; hat doch die Lichtgeschwindigkeit c dann den „sehr großen“ Wert $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Dies hat abstrakt mathematisch natürlich wenig auf sich, psychologisch aber um so mehr. Denn es macht infolgedessen der Anschauung keine Schwierigkeit, den Fall $c = \infty$, wo (5) in die doppeltzählende Ebene $t = t_0$ übergeht, als *Grenzfall* aufzufassen.

3. Wir erkennen bei dieser Einschränkung auf 3 Dimensionen, daß es mit den geradlinigen Erzeugenden der Hyperkegel (1)

(6) $$x = x_0 + \varrho\alpha, \; y = y_0 + \varrho\beta, \; z = z_0 + \varrho\gamma, \; t = t_0 + \varrho\delta$$

[1]) Wegen der mehrdimensionalen Ausdrucksweise vergleiche man etwa den zusammenfassenden Artikel von Segre: Enzyklopädie, Bd. 3 C, 7.

(wo $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - c^2\delta^2 = 0$ sein soll) eine besondere Bewandtnis hat. Eine solche Erzeugende ist für jeden ihrer Punkte Kegelerzeugende. Mehr noch; alle die Kegel, welche von den Punkten der Erzeugenden auslaufen, berühren sich längs der Erzeugenden. Indem wir die sämtlichen Punkte der Erzeugenden mit der zugehörigen, in diesem Falle festen, Tangentialebene:

$$\nu_1 = \alpha,\quad \nu_2 = \beta,\quad \nu_3 = \gamma,\quad \nu_4 = -c^2\delta \tag{7}$$

zusammennehmen, haben wir ein einfachstes Beispiel für das, was wir später[1]) mit Lie einen Streifen nennen werden (nur daß im allgemeinen bei einem Streifen mit dem Punkt der Streifenkurve die zugehörige Tangentenebene wechselt).

4. Indem in (1) nur die Quadrate der Differenzen $(x-x_0), \ldots, (t-t_0)$ auftreten, werden die x-, y-, z-, t-Achsen des Koordinatensystems zu irgend 4 „konjugierten Durchmessern" unseres Hyperkegels parallel. Offenbar bleibt diese Sachlage bei beliebiger Lorentztransformation ungeändert, und wir können die einzelne Lorentztransformation so wählen, daß irgend ein Quadrupel konjugierter Durchmesser von (1) zu den Achsen parallel wird.

Dabei ist es wichtig, die von x_0', y_0', z_0', t_0' auslaufenden reellen Vektoren:

$$(x-x_0),\quad (y-y_0),\quad (z-z_0),\quad (t-t_0) \tag{8}$$

in *raumartige* und *zeitartige* zu trennen. Ein Vektor heißt raumartig, wenn für ihn $f > 0$ ist (wenn er also in dem „flachen" Weltteil „außerhalb" des Kegels (1) verläuft), zeitartig, wenn für ihn $f < 0$ ist. Im Übergangsfall, wo er in eine Kegelerzeugende fällt, $f = 0$, heißt er *singulär*. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise für das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, wenn wir sagen, daß von 4 reellen konjugierten Durchmessern des Hyperkegels (1) immer 3 raumartig, 1 zeitartig sind.

5. Dadurch, daß wir $\sqrt{f}$ als Entfernung zweier Weltpunkte bezeichnen, kommen wir in den Bereich der allgemeinen affinen Maßbestimmung. Die „Länge" eines raumartigen Vektors ist dann reell, die eines zeitartigen rein imaginär, die eines singulären Null. Die Punkte des fundamentalen Gebildes (3) haben von einem beliebigen Raumpunkte eine Entfernung $\frac{0}{0}$. Zwei von x_0, y_0, z_0, t_0 auslaufende Vektoren werden senkrecht zueinander heißen, wenn sie in bezug auf (1) konjugiert sind, d. h. wenn der eine in der Polarebene des anderen liegt usw.

---

[1]) Dieser Hinweis bezieht sich auf das geplante vierte Kapitel, das unausgeführt geblieben ist. Vgl. das Vorwort. (H.)

b) Die einfachsten Ansätze der Infinitesimalgeometrie.

1. Wir werden jetzt x, y, z, t und x_0, y_0, z_0, t_0 als benachbart voraussetzen. Der Vektor (8) soll dann durch den anderen:

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad dt \tag{9}$$

ersetzt werden. Die quadratische Form (1) verwandelt sich in das Quadrat des Bogenelementes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \tag{10}$$

Sollte dieses negativ ausfallen, so führen wir, wie bereits in (3) des vorigen Paragraphen, ein

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}, \tag{11}$$

wo $d\tau$ nunmehr (nach Minkowski) das Element der *Eigenzeit* heißen soll. Wir setzen noch fest, daß ds bzw. $d\tau$, falls sie reell ausfallen und nicht gerade verschwinden, immer positiv genommen werden sollen. Natürlich unterscheiden wir die Vektoren (9), je nachdem daß $ds^2 \gtreqless 0$, als raumartige, zeitartige und singuläre. Den Hyperkegel, den die singulären Fortschreitungsrichtungen (9) erfüllen:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0 \tag{12}$$

pflegt man, im Zusammenhang der folgenden Infinitesimalbetrachtungen, einen *Monge*schen Kegel zu nennen, weil Monge in seiner grundlegenden „Application de l'analyse à la géometrie"[1]), zuerst derartige nichtlineare Differentialbeziehungen geometrisch gedeutet hat, natürlich unter Beschränkung auf 3 Dimensionen. Die singulären Fortschreitungsrichtungen müssen im folgenden immer gesondert betrachtet werden.

2. Bei irgendwelchen in der Welt x, y, z, t verlaufenden Kurven werden wir raumartige und zeitartige, evtl. auch singuläre Stücke unterscheiden; bei den ersteren werden wir von einer Länge $s = \int ds$, bei den zeitartigen Stücken von einer Eigenzeit $\tau = \int d\tau$ sprechen (wobei die Integralgrenzen auf dem Stück beliebig genommen werden können).

3. Wir können die „Richtung" der Kurve in einem ihrer Punkte dementsprechend durch

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds}, \quad t' = \frac{dt}{ds} \tag{13}$$

---

[1]) Zuerst erschienen 1808. Die zweite, von Liouville besorgte Ausgabe (= „5. Auflage"), 1850, in welche neben vielen interessanten anderen Einzelheiten insbesondere auch Gauß' Disquisitiones circa superficies curvas (1827) aufgenommen sind, ist sozusagen die Bibel der modernen Differentialgeometrie: auf ihr ruht die großartige Entwicklung, welche die genannte Disziplin bei allen Nationen genommen hat. Vgl. Bd. I. S. 77.

festlegen, oder auch durch

(14) $$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\tau}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{d\tau}, \quad \dot{t} = \frac{dt}{d\tau},$$

wobei jenachdem

(15) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 1, \quad \text{oder} \quad \dot{t}^2 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} = 1.$$

Analog wird man die „Krümmung" der Kurven durch die zweiten Differentialquotienten

(16) $$x'', y'', z'', t'' \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$$

festlegen. Dabei ist

(17) $$x'x'' + y'y'' + z'z'' - c^2 t't'' = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{t}\ddot{t} - \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{c^2} = 0.$$

Richtungs- und Krümmungsvektor stehen also immer aufeinander senkrecht.

Als „Krümmungsradius" ϱ wird man den reziproken Wert der Quadratwurzel

(18) $$\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - c^2 t''^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\ddot{t}^2 - \frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}{c^2}}$$

bezeichnen.

4. Es ist wichtig, sich zu überzeugen, daß die raumartigen bzw. zeitartigen Geraden der Welt zugleich ihre geodätischen Linien sind, d. h. die Lösungen der Variationsprobleme

(19) $$\delta \int_{-}^{-} ds = 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta \int_{-}^{-} d\tau = 0$$

bilden. Die kleine Rechnung sei nur für die raumartigen Linien durchgeführt. Wir werden dann (19) ausführlicher schreiben:

(20) $$\delta \int_{-}^{-} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2}\, ds = 0$$

und hier x, y, z, t bei Festhaltung der Grenzen als Funktionen von s beliebig variieren. Dies gibt nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$\frac{d\left(\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 d t^2}}\right)}{ds} = 0, \ldots$$

und hieraus, indem wir (15) heranziehen, durch direkte Integration:

$$x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma, \quad t' = \delta$$

oder in Übereinstimmung mit (44), S. 98:

(21) $$x = x_0 + s\alpha, \quad y = y_0 + s\beta, \quad z = z_0 + s\gamma, \quad t = t_0 + s\delta\,^{1)}.$$

Für die singulären Geraden versagt dieser Ansatz, weil bei der Zwischen-

[1]) Wobei jetzt natürlich $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - c^2\delta^2 = 1$ zu wählen ist.

rechnung der Ausdruck $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^{2'} t^2}$, der für sie verschwindet, in den Nenner tritt. Wenn wir sie trotzdem später kurzweg als singuläre geodätische Linien bezeichnen, so kann das nur meinen, daß sie zwischen den raumartigen und den zeitartigen geodätischen Linien den Übergang bilden.

5. Mit Rücksicht auf spätere Entwicklungen werde hier in Form eines bloßen Referates noch einiges über Scharen geodätisch äquidistanter Hyperflächen angeführt. Schon *Gauß* hat in seiner oben genannten grundlegenden Abhandlung von 1827 den Fall von 2 Dimensionen in Betracht gezogen: Kurvenscharen, deren orthogonale Trajektorien geodätische Linien sind, sind immer auch geodätisch äquidistant. Dabei legt Gauß natürlich ein definites ds^2 zugrunde. *Beltrami* hat diese Theorie 1869 auf n-fach ausgedehnte Räume mit beliebig vorzugebendem definiten $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ übertragen; natürlich handelt es sich dann um Scharen $(n-1)$-fach ausgedehnter äquidistanter Mannigfaltigkeiten. Bei unserm ds^2 (10) tritt als neues Moment hinzu, daß es indefinit ist, so daß wir zwischen raumartigen und zeitartigen Hyperflächenscharen unterscheiden und den zwischenliegenden Übergangsfall als singulär einer besonderen Betrachtung vorbehalten müssen. Raumartig werden wir die Schar der Hyperflächen nennen, wenn ihre orthogonalen geodätischen Trajektorien zeitartig sind, und umgekehrt. Nach der anderen Seite ist unser Fall besonders einfach, weil ja unsere geodätischen Linien gerade Linien sind.

Die zentrale Bedeutung dieser geometrischen Theorie liegt darin, daß die Bedingung für die geodätische Äquidistanz der Flächenschar:

$$F(x, y, z, t) = k \tag{22}$$

durch die einfache partielle Differentialgleichung 1. Ordnung gegeben ist:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = K, \tag{23}$$

wobei positives K die raumartigen Fälle, negatives K die zeitartigen charakterisiert (während $K = 0$ den hier noch ausgeschlossenen singulären Fall ergibt). Das Stück der orthogonalen Trajektorie, welche von irgend einem Punkte der Fläche $F = k_1$ bis zu $F = k_2$ hinreicht (und dabei eine geodätische Linie ist), hat die Länge

$$s = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{K}}, \tag{24}$$

bzw. die Eigenzeit

$$\tau = \frac{|k_1 - k_2|}{c\sqrt{K}}. \tag{24'}$$

Man mache sich dies an dem einfachen Falle deutlich, der dem Fall konzentrischer Kugeln der Elementargeometrie entspricht, wo nämlich F durch die Formel gegeben ist:

$$F = \sqrt{K\,[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - c^2\,(t-t_0)^2]}\,. \tag{25}$$

c) Die Differentialgleichung $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = 0.$

Ersichtlich definiert vorstehende Differentialgleichung solche Hyperflächen

$$F\,(x, y, z, t) = 0\,, \tag{26}$$

die in jedem ihrer Punkte von dem von diesem auslaufenden Mongeschen Kegel $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0$ berührt werden. Um unsere Darstellung derjenigen von Monge selbst näher zu bringen, denken wir uns (26) nach t aufgelöst und schreiben:

$$t - \Phi\,(x, y, z) = 0\,. \tag{27}$$

Setzen wir dann noch

$$\frac{\partial t}{\partial x} = p\,, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = q\,, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = r\,,$$

so schreibt sich unsere partielle Differentialgleichung:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{c^2}\,. \tag{28}$$

Mit (27) ist auch $t - \Phi = \text{const}$ eine Lösung. Als nächstliegendes Beispiel haben wir den vom Punkte x_0, y_0, z_0, t_0 auslaufenden Hyperkegel $f = 0$ selbst; nur müssen wir seine Gleichung jetzt so schreiben:

$$t - \sqrt{\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{c^2}} = t_0\,. \tag{29}$$

Ebenso erfüllen (28) alle Hyperebenen, welche einen solchen Kegel (oder, was dasselbe ist, das fundamentale Ellipsoid) berühren, d. h. die Hyperebenen

$$\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 t + \nu_5 = 0$$

mit

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0$$

(vgl. Gleichung (4) oben).

Die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung soweit wir sie im folgenden brauchen, ist für den Fall dreier Variablen von Lagrange geschaffen und von Cauchy (1819) auf n Variable ausgedehnt worden. Monge hat dann, zunächst für 3 Variable, die geometrische Deutung hinzugefügt, (siehe sein Werk von 1808, l. c. S. 107), die Lie um 1870 herum auf n Variable ausdehnte und dadurch vervollständigte, daß er prinzipiell nicht nur von den „Punkten“

$x, y, z, t \ldots$ einer Integralmannigfaltigkeit, sondern von ihren „Elementen" $x, y, z, t, \ldots, p, q, r, \ldots$ sprach. An die Stelle irgendwelcher auf der Integralmannigfaltigkeit gezogenen „Kurven" treten dann, wie schon oben angedeutet, „Streifen".

Aus dem ausgedehnten mathematischen Gebiet, welches wir hiermit berühren, wollen wir — mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des Folgenden — nur einen einzigen Punkt herausgreifen bzw. an der partiellen Differentialgleichung (28) erläutern. Das ist die Lehre von den *Charakteristiken* (wie Monge sagte) oder, in Liescher Ausdrucksweise, von den *charakteristischen Streifen*. Wir wollen bei 4 Variablen x, y, z, t bleiben und die vorgelegte partielle Differentialgleichung 1. Ordnung allgemein mit

$$\Omega\,(x, y, z, t, p, q, r) = 0 \tag{30}$$

bezeichnen. Es handelt sich dann um Streifen, welche durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} dx : dy : dz : dt : dp : dq : dr = \frac{\partial \Omega}{\partial p} : \frac{\partial \Omega}{\partial q} : \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ : \left(p\frac{\partial \Omega}{\partial p} + q\frac{\partial \Omega}{\partial q} + r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) : -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) \\ : -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + q\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) : -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + r\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Der „Streifencharakter" ist dabei dadurch gewährleistet, daß ersichtlich

$$dt - (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = 0$$

ist.

Dann gilt folgendes merkwürdige Theorem: Alle Integralmannigfaltigkeiten von (30) (im allgemeinen, weil wir 4 Variable haben, selbst dreifach ausgedehnte Gebilde) werden von ∞^2 charakteristischen Streifen überdeckt; und man erhält geradezu alle Integralmannigfaltigkeiten von (30), indem man solche ∞^2 charakteristische Streifen zusammenfaßt, welche eine beliebig vorgegebene Hyperfläche (die sich im besonderen Fall auf eine zweidimensionale Fläche, oder auf eine Kurve oder auch auf einen einzelnen Punkt reduzieren kann) berühren. Die volle Lösung der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung (30) kommt also auf die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (31) hinaus.

Es ist nicht möglich, diese Theorie hier zu begründen, wohl aber, sie auf die partielle Differentialgleichung (28) anzuwenden. Wir haben für ihre charakteristischen Streifen

$$dx : dy : dz : dt : dp : dq : dr : = p : q : r : p^2 + q^2 + r^2 : 0 : 0 : 0, \tag{32}$$

wobei man nach (28) $p^2 + q^2 + r^2$ durch $\frac{1}{c^2}$ zu ersetzen hat. Die p, q, r

sind also konstant. Wir setzen, um den Anschluß an frühere Entwicklungen zu erhalten:

$$(33)\qquad p=\frac{\alpha}{c^2\delta}, \quad q=\frac{\beta}{c^2\delta}, \quad r=\frac{\gamma}{c^2\delta}$$

also wegen (28): $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-c^2\delta^2=0$. Die weitere Integration der Gleichung (32) gibt dann:

$$(34)\qquad x=x_0+\frac{\alpha(t-t_0)}{\delta}, \quad y=y_0+\frac{\beta(t-t_0)}{\delta}, \quad z=z_0+\frac{\gamma(t-t_0)}{\delta}.$$

Das sind genau die Streifen, welche von den Erzeugenden (6) der Hyperkegel (1) bzw. den zugehörigen Tangentialebenen (7) gebildet werden. Anders ausgedrückt: Die charakteristischen Kurven fallen mit den singulären Geraden (die wir auch die singulären geodätischen Linien nannten), die ihren Punkten zugeordneten Hyperebenen mit den durch diese Geraden hindurchgehenden Tangentialebenen an das fundamentale Ellipsoid zusammen.

Zum Schluß wollen wir die vorliegende Theorie auf die allgemeine partielle Differentialgleichung (23) ausdehnen. Zu diesem Zweck müssen wir uns in den Raum von 5 Dimensionen x, y, z, t, u begeben und Hyperflächen dieses Raumes mit der Gleichungsform

$$(35)\qquad u=F(x, y, z, t)$$

suchen. Schreiben wir für die partiellen Differentialquotienten kurz:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\pi, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\varkappa, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=\varrho, \quad \frac{\partial F}{\partial t}=\sigma,$$

so haben wir die Differentialgleichung vor uns:

$$(36)\qquad \pi^2+\varkappa^2+\varrho^2-\frac{\sigma^2}{c^2}=K.$$

Für die zugehörigen charakteristischen Streifen aber erhalten wir, indem wir die Rechnungen etwas zusammenziehen:

1. Die Differentialgleichungen:

$$(37)\qquad dx:dy:dz:dt:du:d\pi:d\varkappa:d\varrho:d\sigma$$
$$=\pi:\varkappa:\varrho:-\frac{\sigma}{c^2}:K:0:0:0:0.$$

2. Sodann, indem wir die hiernach konstanten Werte der $\pi, \varkappa, \varrho, \sigma$ mit $\frac{\alpha}{\sqrt{K}}, \frac{\beta}{\sqrt{K}}, \frac{\gamma}{\sqrt{K}}, \frac{c^2\delta}{\sqrt{K}}$ bezeichnen und unter s einen geeigneten Parameter verstehen:

$$(38)\qquad x=x_0+\alpha s, \; y=y_0+\beta s, \; z=z_0+\gamma s, \; t=t_0+\delta s, \; u=u_0+\sqrt{K}s.$$

Lassen wir hier die Gleichung mit u weg, so heißt dies, daß wir die Kurve (38) des fünfdimensionalen Raumes auf den uns geläufigen vierdimensionalen Raum der x, y, z, t „projizieren". Wir haben dann genau die Gleichungen (21) der raumartigen bzw. zeitartigen geodätischen Linien der „vierdimensionalen Welt"[1]). Diese geodätischen Linien erscheinen also als Projektion der charakteristischen Kurven des fünfdimensionalen Raumes. Zugleich ist $u - u_0$ nichts anderes als die mit $\sqrt{K}$ multiplizierte Länge des gerade betrachteten geodätischen Kurvenstückes.

Wir können diese Beziehung natürlich weiter ausführen, indem wir auch die $\pi, \varkappa, \varrho, \sigma$ vierdimensional deuten und darauf die Integration der Gleichung (36) durch die zugehörigen charakteristischen Streifen mit den unter b) gemachten Annahmen über die Integration durch geodätische Linien in volle Verbindung bringen. Wir haben immer nur die Mannigfaltigkeit $u = F(x, y, z, t)$ des R_5 im R_4 durch die Schar der „Niveauflächen", längs deren F konstant ist, zu veranschaulichen. Ist F eine Lösung von (35), so werden diese Niveauflächen im R_4 geodätisch äquidistant sein usw. Es ist eine Art darstellende Geometrie, welche die Verhältnisse des R_5 im R_4 zu studieren gestattet.

Es ist unmöglich, daß ich diese an sich hochinteressanten Beziehungen, die von den Genannten nach vielen Richtungen ausgebaut sind, hier noch weiter verfolge. Wir werden ihnen in unseren späteren Exkursen über analytische Mechanik wieder begegnen[2]).

§ 3. Physikalische Ergänzungen unseres Weltbildes, mit weiteren geometrischen Ausführungen.

Um dem Standpunkt der modernen Physik vollends gerecht zu werden, habe ich die Entwicklungen des vorigen Paragraphen nach einigen Richtungen zu vervollständigen.

a) Nähere Festlegung der physikalischen Grundbegriffe.

Es handelt sich um zwei Festsetzungen, welche mit den bisherigen Betrachtungen zwar verträglich, aber nicht durch sie gegeben sind.

Das erste ist, daß die Physiker, trotz aller einschneidenden Änderungen, welche das Relativitätsprinzip der Lorentzgruppe betreffend unsere Vorstellungen über Raum und Zeit mit sich bringt, an dem *Unterschiede von Vergangenheit und Zukunft*, was die einzelne Raumstelle angeht, festhalten müssen. Genauer gesagt: Es sollen nur solche Substitutionen (10) zulässig sein, bei denen einem positiven Inkrement von t bei festgehaltenem x, y, z ein positives Inkrement von t' entspricht, bei

[1]) Nur daß immer t statt l geschrieben ist und dementsprechend δ eine modifizierte Bedeutung hat.

[2]) Siehe Note 3, S. 67.

denen also der Koeffizient α_{44} positiv ist! — Die Verträglichkeit dieser Festsetzung mit den relativistischen Ideen, wie wir sie hier voranstellen, liegt darin, daß diejenigen reellen Substitutionen (11), welche ein positives α_{44} haben, für sich eine Gruppe bilden[1]).

Wir erkennen auch, daß die Beschränkung auf positive α_{44}, an der wir fortan festhalten, eine Voraussetzung dafür ist, daß die zugehörigen reellen Lorentzsubstitutionen ein *Kontinuum* bilden.

Infolge dieser Beschränkung kann jeder der in (1), S. 105 definierten Kegel:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0$$

wie Minkowski es ausdrückt, in einen *Vorkegel* und einen *Nachkegel* eindeutig zerlegt werden (von denen der erstere der „Vorwelt" ($t < t_0$), der letztere der „Nachwelt" ($t > t_0$) angehört). Auf jeder zeitartigen Kurve aber (und schließlich auch auf jeder singulären Kurve) können wir einen positiven Sinn festsetzen, der in jedem Punkte der Kurve von der Vorwelt zur Nachwelt weist.

Nun aber eine zweite physikalische Einschränkung der bis jetzt entwickelten Denkweise: Aus der gewöhnlichen Physik soll der *Begriff des materiellen Punktes* (der im Laufe der Zeit mit sich selbst, wie man sagt, identisch bleibt — mag es sich dabei um ein Teilchen ponderabler Materie oder um ein Elektron handeln) übernommen werden. Während man sonst sagte, daß ein solcher Punkt sich im Raume beliebig bewegte, so werden wir nun — wieder mit Minkowski — von der *Weltlinie* sprechen, die er in dem vierdimensionalen Gebiete der x, y, z, t beschreibt. Wir werden ferner festsetzen, daß, im Sinne der gewöhnlichen Sprechweise, die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes niemals $> c$ sein soll. Dies heißt hier, daß die Weltlinie immer zeitartig und nur im Grenzfall singulär sein soll[2]). — Wir müssen uns das Bild machen, daß im Gebiete der vierdimensionalen Welt so viele dieser Linien nebeneinander

---

[1]) Sehr hübsch kommt dies bei der independenten Darstellung der Substitutionen durch Biquaternionen heraus, wie wir sie in Formel (11), § 1 erwähnten. Der Koeffizient a_{44} hat dabei nämlich den Wert

$$(1) \qquad \frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 + D_2^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 - A_2^2 - B_2^2 - C_2^2 - D_2^2},$$

wo der Zähler (bei reellen $A_1 \ldots A_2 \ldots$) an sich positiv ist und der Nenner die Norm der Biquaternionen $Q_1 \pm \varepsilon Q_2$ vorstellt. Nun setzen sich unsere Substitutionen zusammen, indem man die zugehörigen Biquaternionen miteinander multipliziert. Bei der Multiplikation zweier Quaternionen multiplizieren sich aber auch ihre Normen. Ergo usw.

[2]) Je größer die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes x, y, z (im Sinne der gewöhnlichen Ausdrucksweise) ist, um so flacher verläuft seine Weltlinie. Jedes Stück der Weltlinie besitzt seine „Eigenzeit". Es ist die kühne Idee Einsteins, daß eine vom materiellen Punkte mitgeführte Uhr eo ipso diese Eigenzeit registrieren würde.

herlaufen (ohne einander zu treffen), als wir eben materielle Punkte unterscheiden wollen, und daß alles physikalische Geschehen sich durch Beziehungen zwischen diesen Weltlinien ausdrücken läßt. Wir werden dabei an dem gewöhnlichen *Kausalitätsprinzip* festhalten, d. h. voraussetzen, daß immer nur die Vergangenheit auf die Zukunft wirkt, nicht umgekehrt. Die einzelne Stelle einer Weltlinie I kann dann nur von demjenigen Stück einer anderen Weltlinie II beeinflußt werden, das innerhalb oder auf ihrem Vorkegel liegt. Dabei beweist man leicht, daß bei zeitartigem Verlauf von II immer nur ein Punkt auf II vorhanden ist, in welchem II von dem Vorkegel der auf I angenommenen Stelle geschnitten wird. Wenn wir uns denken — ich falle auf die traditionelle Ausdrucksweise zurück —, daß von den verschiedenen Punkten II eine Wirkung ausgeht, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzt, so ist es nur diese eine Stelle von II, von der die auf I angenommene Stelle beeinflußt wird. Deshalb nannte Minkowski diese Stelle auf II den zur Stelle von I gehörigen Lichtpunkt.

Die größere Bestimmtheit, welche unsere physikalischen Vorstellungen mit diesen Festsetzungen gewonnen haben, wollen wir hier nur verwenden, um die früheren Angaben über das von einem gleichförmig bewegten Elektron emittierte Viererpotential zu vervollständigen. Das Elektron soll sich mit einer Geschwindigkeit $< c$ bewegen. Zu jedem Weltpunkte x, y, z, t gehört dann auf seiner Weltlinie nach dem eben Gesagten gerade ein Lichtpunkt x_0, y_0, z_0, t_0 (wobei $t_0 < t$). Wir werden ferner nach der Formel (14) S. 108 von den zugehörigen Richtungskomponenten $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{t}_0$ sprechen (die bei einem gleichförmig bewegten Elektron natürlich für alle Stellen seiner Weltlinie denselben Wert haben) Dabei ist $\dot{t}_0$ nach der neuerdings getroffenen Verabredung > 0. Die Komponenten des zugehörigen Viererpotentials, die auf S. 99 (Formel 47) nur bis aufs Vorzeichen angegeben werden konnten, werden jetzt

$$(2) \qquad q_x = -\frac{e\,\dot{x}_0}{c^2 P}, \quad q_y = -\frac{e\,\dot{y}_0}{c^2 P}, \quad q_z = -\frac{e\,\dot{z}_0}{c^2 P}, \quad q_t = +\frac{e\,\dot{t}_0}{P},$$

wobei P den immer positiven Wert bedeutet:

$$(2') \qquad P = \dot{t}_0 (t - t_0) - \frac{\dot{x}_0 (x - x_0) + \dot{y}_0 (y - y_0) + \dot{z}_0 (z - z)}{c^2}.$$

In der Tat liegt x, y, z, t immer auf dem Nachkegel von x_0, y_0, z_0, t_0. Ich verzichte auf die Einzelheiten der Nachrechnung und will nur angeben, daß diese Formeln wesentlich übereinstimmen mit den unsymmetrisch geschriebenen, die seinerzeit (wie S. 99 berichtet) von Liénard bzw. Wiechert für den Fall eines beliebig mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegte Elektrons aufgestellt worden sind. Daß man hierbei auf dieselben Formeln (2) kommt, wie im Falle eines gleichförmig bewegten Elektrons, ist eine merkwürdige Tatsache, auf die man geführt wird, wenn man die Theorie der partiellen Differentialgleichung, von der wir im folgenden Paragraphen handeln werden, etwas weiter verfolgt, als es dort möglich ist. Man vergleiche etwa die Darstellung in der wiederholt genannten Arbeit von Sommerfeld vom Jahre 1910.

b) Weitere geometrische Ausführungen.

Die merkwürdige Harmonie, die zwischen den früheren Gedankenschöpfungen der mathematischen Theoretiker und dem heutigen Rüstzeug der mathematischen Physiker besteht, wurde wiederholt hervorgehoben. Ich kann mir nicht versagen, noch auf zwei besondere Punkte einzugehen, bei denen sich diese Harmonie erneut bewährt hat. Handelt es sich doch um geometrische Auffassungsweisen, welche in den Jahren 1869/71 von Darboux, von Lie und von mir selbst, zum Teil in persönlichster Zusammenarbeit, entwickelt worden sind. Man wolle etwa die Abhandlungen von Lie und mir in Bd. 5 der Math. Ann. (1871) oder auch die zusammenfassende Darstellung in Bd. 1 meiner autographierten Vorlesung über höhere Geometrie (1893) vergleichen[1]).

1. Abbildung der vierdimensionalen Welt x, y, z, t auf die Kugeln des dreidimensionalen Raumes x, y, z.

Wir ersetzen einfach den Punkt x_0, y_0, z_0, t_0 durch den Schnitt, welchen der von ihm auslaufende Hyperkegel

$$(3) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0$$

mit dem dreidimensionalen Raum $t=0$ gemein hat. Es ist dies die Kugel, welche $x_0, y_0\ z_0$ zum Mittelpunkte und $\pm ct_0$ zum Radius hat. Die Beziehung wird völlig eindeutig, wenn wir auch noch Kugeln von positivem und negativem Radius (sogenannte „orientierte" Kugeln) unterscheiden, wie dies in der Lie'schen „Kugelgeometrie" (oder auch bei Laguerre und anderen modernen Geometern) durchaus üblich ist.

Was wird bei diesem Übertragungsprinzip aus der Weltlinie von x_0, y_0, z_0, t_0? Eine Schar von Kugeln oder, um es noch physikalischer auszudrücken, von kugelförmigen Lichtwellen, welche in dem irgendwie mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegten Raumpunkte $x_0, y_0\ z_0$ ihren Mittelpunkt haben. Solange $t_0<0$ (Vergangenheit), haben wir Lichtwellen, die sich auf ihren Mittelpunkt zusammenziehen, sobald $t_0>0$, Lichtwellen, die sich von da aus (immer mit der Geschwindigkeit c) ausbreiten. Im übrigen werden sich die Kugeln für $t_0<0$ wie die für $t_0>0$ bzw. umschließen (ohne einander in reellen Punkten zu schneiden).

---

[1]) Siehe Note I S. 29.

Es wird manchem lieber sein, sich mit diesem Bilde, statt mit dem einer vierfach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit (x_0, y_0, z_0, t_0) zu beschäftigen. So hat es Timerding im 21. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 1912 in Vorschlag gebracht. Aber auch Bateman in der S. 79 genannten Abhandlung von 1909 hat es bereits benutzt, und dabei bemerkt, daß die Substitutionen der G_{15}, welche $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0$ in sich verwandeln, gleichorientierte Kugeln des R_3, die sich berühren, in ebensolche transformieren und umgekehrt. Er nennt besagte Transformationen daher „spherical wave transformations“[1]).

2. Die Lorentzgruppe als Grenzfall einer allgemeineren Gruppe.

Nach den allgemeinen Grundsätzen Cayleys von 1859, wie sie in Bd. 1, Kap. IV, dargelegt wurden, läßt sich die Lorentzgruppe bzw. die zugehörige „affine“ Maßbestimmung auf die projektive Betrachtung des in (4) S. 105 genannten Gebildes 2. Klasse

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0 \tag{4}$$

gründen. Dieses Gebilde wurde dort (da wir es mit 5 homogenen Variablen zu tun hatten) als solches von verschwindender Determinante bezeichnet. Dem geschulten Geometer macht es keine Schwierigkeit, an seine Stelle das allgemeinere Gebilde zu setzen

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} + \frac{\nu_5^2}{R^2} = 0\,, \tag{5}$$

aus welchem (4) als Grenzfall für $R = \infty$ hervorgeht. Wir haben dann auch in homogenen Punktkoordinaten statt der zwei Gleichungen (3) S. 105 eine einzige quadratische Gleichung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - c^2\,\xi_4^2 + R^2\,\xi_5^2 = 0 \tag{6}$$

zugrunde zu legen. Indem wir die Einheit der Entfernung schicklich wählen, mögen wir als „Entfernung zweier Punkte“ in der zugehörigen projektiven Maßbestimmung den Ausdruck

$$R \cdot \arccos\left(\frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - c^2\xi_4\eta_4 + R^2\xi_5\eta_5}{\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + R^2\xi_5^2}\,\sqrt{\eta_1^2 + \cdots + R^2\eta_5^2}}\right) \tag{7}$$

wählen, der sich in

$$R \arcsin \frac{\sqrt{D_{\xi\eta}}}{\sqrt{\xi_1^2 + \cdots}\,\sqrt{\eta_1^2 + \cdots}} \tag{8}$$

---

[1]) Bateman ist im allgemeinen über die in Betracht kommende Literatur ausgezeichnet orientiert. Aber hier ist ihm entgangen, daß besagte Kugeltransformationen sachlich und formell zusammenfallen mit denjenigen der Lie'schen Kugelgeometrie.

umsetzen läßt, wo $D_{\xi\eta}$ die doppelt geränderte Determinante bedeutet:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_3 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & \xi_4 & \eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^2 & \xi_5 & \eta_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Formel (8) bzw. (9) wird hier angeführt, weil sie am einfachsten erkennen läßt, daß (7) bei Übergang zu $R = \infty$ den Entfernungsbegriff der Lorentzgruppe liefert. In der Tat entsteht für $R = \infty$ aus (8)

$$(10)\qquad \frac{\sqrt{(\xi_1\eta_5 - \xi_5\eta_1)^2 + (\xi_2\eta_5 - \xi_5\eta_2)^2 + (\xi_3\eta_5 - \xi_5\eta_3)^2 - c^2(\xi_4\eta_5 - \xi_5\eta_4)^2}}{\xi_5\eta_5},$$

und das ist bei inhomogener Schreibweise nichts anderes als der uns wohlbekannte Ausdruck

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2}\,.$$

Ich würde diese ganz beiläufige Auseinandersetzung hier nicht eingeschaltet haben, wenn nicht Einstein in seiner neuesten Veröffentlichung (Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Februar 1917) von kosmologischen Betrachtungen aus zwar nicht in völlig durchgebildeter Form, aber doch dem Wesen der Sache nach genau zu dem Ansatz (7) gekommen wäre[1]). Ihm lag daran, die „Weltanschauung" der Lorentzgruppe dahin zu modifizieren, daß die Welt zwar zeitlich unendlich ausgedehnt bleibt, nicht aber räumlich. Dies aber wird genau durch den Ansatz (7) erreicht (ich brauche für den Geometer nicht auseinanderzusetzen, daß es sich, im Sinne meiner alten Terminologie, darum handelt, an die Stelle der „parabolischen" Maßbestimmung des Lorentzfalles eine „elliptische" Maßbestimmung zu setzen).

§ 4. Historisches über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \cdots - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$.

Wir haben die Integration der Maxwellschen Gleichungen durch Einführung des Viererpotentials auf das Gleichungssystem

$$\Box q_i = 0$$

[1]) Wie Klein selbst an dieser Stelle handschriftlich nachgetragen hat, ist diese Angabe nicht genau. Formel (7) entspricht einem Ansatz de Sitters, nicht Einsteins. Vgl. F. Klein: Über die Integralform der Erhaltungssätze und

zurückgeführt. Jetzt wird es sich also für uns um die einzelne Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

handeln, die wir die dreidimensionale Schwingungsgleichung nennen können; sie steht überall im Mittelpunkte, wo es sich um Schwingungsprobleme dreidimensionaler (isotroper) räumlicher Kontinua handelt. Sie ist bereits 1759 bei Untersuchungen über Schallbewegung von Euler aufgestellt worden[1]).

Eine volle historische Würdigung des Entwicklungsganges ist natürlich nur möglich, wenn man einerseits auf die eindimensionale Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0,$$

andererseits auf die Differentialgleichung des Potentials

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

zurückgreift. In beiderlei Hinsicht bringen die bis jetzt erschienenen Teile des zweiten Bandes der math. Enzyklopädie, insbesondere aus der Feder von Burkhardt, reiches Material; man vergleiche auch den umfangreichen Bericht von Burkhardt in Bd. 10; 2, a, b der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung (1908).

Hier kann nur sozusagen die persönliche Seite der historischen Entwicklung (die sich nun über mehr als 150 Jahre hinzieht), gekennzeichnet werden. Es ist gerade umgekehrt, wie bei den Theorien, die wir bisher im Zusammenhang mit der Lorentzgruppe behandelten. Bei letzteren ist es die rein mathematische Spekulation, welche vorangeht, und die mathematische Physik hat, wenn sie ökonomisch verfahren will, die Möglichkeit, sich fertig vorliegender Gedankenreihen für ihre Zwecke zu bedienen. Bei unseren partiellen Differentialgleichungen ist das Sachverhältnis genau umgekehrt. Hier haben die mathematischen Physiker die grundlegenden Gedankenansätze von sich aus geschaffen und die reinen Mathematiker erst hinterher begonnen, die genauen Bedingungen, unter denen diese Ansätze möglich sind, herauszuarbeiten.

Sprechen wir, was die Integrationstheorie der Gleichung (1) angeht, zunächst von ihrer Grundlösung, d. h. derjenigen Lösung, die im Raume der x, y, z eine möglichst einfache Punktsingularität hat und sich im Unendlichen möglichst unschuldig verhält. Bei der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

---

die Theorie der räumlich geschlossenen Welt. Gött. Nachr. 1918, S. 394 = Ges. Abh. Bd. 1, S. 586. (H.)

[1]) Gesamtausgabe, 3. Serie, Bd. 1, S. 480.

ist dies, wenn wir den singulären Punkt x_0, y_0, z_0 mit einer Masse ω ausstatten, bekanntlich

$$\frac{\omega(x_0, y_0, z_0)}{r},$$

wo $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + \cdots + (z-z_0)^2}$; denkt man sich die Masse ω auch noch von der Zeit t abhängig, so wird dies

$$\frac{\omega(x_0, y_0, z_0; t)}{r}.$$

Als Grundlösung von (1) ergibt sich nun die nur wenig kompliziertere Form

$$\frac{\omega\left(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \tag{2}$$

die man heute als *verzögertes* (*retardiertes*) Potential bezeichnet (es kommt eben diejenige Masse des singulären Punktes zur Geltung, die sich dort zu der „früheren" Zeit $t - \frac{r}{c}$ befand). Im Prinzip findet sich diese Lösung schon in den sogleich zu nennenden Arbeiten von Poisson; die moderne Bezeichnung treffe ich zum ersten Male in der zweiten Auflage von Poincarés Electricité et Optique, Paris, 1901 (S. 455 daselbst, wo sie aber als bekannt vorausgesetzt wird).

Im übrigen dürfte, was die Integrationstheorie von (1) angeht, die folgende Aufzählung die Hauptfortschritte treffen:

1. Voran stehen die Arbeiten von Poisson aus den Jahren von 1808 bis 1819. Es wird vor allen Dingen eine Formel gewonnen, welche die zeitliche Ausbreitung einer irgendwie im Raum zur Zeit $t = 0$ gegebene Anfangsstörung behandelt. Es ist jeweils über die Hauptlösungen (2) bzw. ihre nach t genommenen Differentialquotienten zu summieren, die sich auf diejenigen Raumpunkte x_0, y_0, z_0 beziehen, für welche $t - \frac{r}{c} = 0$ ist[1]). Die Formel besteht dementsprechend aus der Summe zweier Doppelintegrale[2]).

2. Die Poissonsche Formel kann als Lösung einer besonderen „Randwertaufgabe" angesehen werden. Denn die Mannigfaltigkeit $t = 0$, für welche F und $\frac{\partial F}{\partial t}$ gegeben werden, ist als Rand der „Halbwelt" $t > 0$ aufzufassen (der „positiven Halbwelt", wie sich Minkowski gern gesprächsweise ausdrückte), für welche die Lösung gesucht wurde. Es hat dann volle 40 Jahre gedauert, ehe Helmholtz („Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden", 1859, Crelles Journal Bd. 57) unter Heranziehung insbesondere der von Green für die Poten-

[1]) Welche für x, y, z, t „Lichtpunkte" sind.

[2]) Sie findet sich in allen einschlägigen Büchern der mathematischen Physik, z. B. in Rayleighs „Theory of sound" (London, 1. Aufl. 1877/78. 2. Aufl. 1894).

tialtheorie entwickelten Methoden, allgemeinere Randwertaufgaben in Angriff nahm. In denselben Gedankenkreis, nur noch mehr vierdimensional ausgeprägt, gehört Kirchhoffs berühmte Begründung des Huyghensschen Prinzips (Berliner Sitzungsberichte 1882). Es handelt sich um die Bestimmung von F in einem zylinderartigen Weltstück, welches irgend ein Raumstück als Basis und lauter Erzeugende parallel zur t-Achse hat.

3. In Rayleighs eben zitierter „theory of sound", findet sich sodann vieles weitere Material. Unter andern wird dort das dreifache Integral behandelt

$$\iiint \frac{\omega\left(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dx_0 dy_0 dz_0, \tag{3}$$

welches über den Vorkegel eines beliebigen Weltpunktes x, y, z, t erstreckt wird; es zeigt sich, daß (3) der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -4\pi\omega \tag{4}$$

genügt, woraus man rückwärts die Bedeutung der Grundlösung (2) und ihr Auftreten in der Poissonschen Formel ableiten kann. (Dieselbe Entwicklung in elektromagnetischer Deutung später unter anderm bei Lorentz, La théorie électromagnetique de Maxwell, Leyden, 1892.)

4. Die Angaben aus 2. sind noch dahin zu vervollständigen, daß in ihnen wegen der Anwendung auf Akustik sehr bald

$$F = \varphi(x, y, z)\, e^{ikt} \tag{5}$$

gesetzt wird, wodurch an Stelle von (1) die partielle Differentialgleichung mit nur 3 unabhängigen Veränderlichen tritt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{K^2}{c^2}\varphi = 0. \tag{6}$$

Über die hier anknüpfende umfangreiche Literatur vgl. die von mir veranlaßte Monographie „Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$" von Pockels (1891), sowie das interessante Referat von Sommerfeld in Bd. 2, A 7c der math. Enzyklopädie (1900), das inzwischen selbst durch die moderne Entwicklung bereits überholt ist.

5. An den hiermit zitierten Stellen ist bei Behandlung der Randwertaufgaben nicht nur von der Verwendung der Hauptlösung (1) und ihrer Verallgemeinerung, der „*Greenschen Funktionen*" gegebener Bereiche, sondern auch von der *Methode der Reihenentwicklungen* die Rede, die auf (1) angewandt, über (5) hinausgehend, für jeden Bereich eine unendliche Kette von Partikularlösungen

$$F_i = \varphi_i(x) \cdot \chi_i(y) \cdot \psi_i(z) \cdot \omega_i(t) \tag{7}$$

suchen wird, um die angestrebte Lösung F in der Gestalt

$$F = \Sigma c_i F_i \tag{8}$$

herzustellen. Der französische Forscher Lamé hat der hiermit angedeuteten Fragestellung für die zu seiner Zeit im Vordergrund des Interesses stehenden partiellen Differentialgleichungen der Physik einen guten Teil seiner Lebensarbeit gewidmet. An ihn anknüpfend habe ich später für zahlreiche Reihenentwicklungen der dreidimensionalen Potentialtheorie das formale Gesetz aufweisen können; man vergleiche das daran anknüpfende Buch „Reihenentwicklungen der Potentialtheorie" von Bôcher, 1894. Es fehlte noch der Konvergenzbeweis der hervorkommenden Reihen, aber auch dieser ist durch die moderne Forschung erbracht worden. Kein Zweifel, daß man bei dem Ansatz (7), (8) in entsprechender Weise vorgehen kann[1]).

Erinnern wir daran, daß unsere partielle Differentialgleichung (1) nicht nur bei den Substitutionen der zehngliedrigen Lorentzgruppe, sondern auch bei denjenigen der fünfzehngliedrigen Gruppe in sich übergeht, so haben wir eine ganze Reihe von Methoden zur Verfügung, um geeignete Partikularlösungen von (1) bzw. geeignete Lösungen der Maxwellschen Gleichungen zu finden[2]).

§ 5. Die elementare Optik, insbesondere die geometrische Optik als erste Näherung der Maxwellschen Gleichungen.

In diesem Parapraphen will ich entwickeln, wie die allgemeine Optik, d. h. die Lehre von der allgemeinen Integration der Maxwellschen Gleichungen bei geeigneten Annahmen und dreidimensionaler Interpretation in die gewöhnlichen Ansätze der elementaren Wellenoptik bzw. der geometrischen Optik, übergeht.

Die allgemeine Optik hat es, wie wir gerade bemerkten, mit den Differentialgleichungen:

$$\Box q_i = 0 \qquad \mathrm{Div}\, q = 0 \tag{1}$$

[1]) Bei den Reihenentwicklungen der dreidimensionalen Potentialtheorie macht man nirgends von der allgemeinen hypergeometrischen Funktion Gebrauch, wie sie nach Gauß oder Riemann definiert wird, sondern immer nur von Spezialfällen und Grenzfällen (Kugelfunktionen, Besselschen Funktionen usw.). Es folgt aber aus den formalen Ansätzen, die ich eben erwähnte, daß dies bei sinngemäßer Aufgabenstellung für die Differentialgleichung (1) anders wird. In der Tat hat Bateman in Bd. 7 der 2. Serie der Proceedings der London Mathematical Society (1909) hierher gehörige Formeln gegeben.

[2]) Es müßte sehr interessant sein, zu untersuchen, wie weit diese Methoden in ihrer Anwendung auf praktische Fälle reichen bzw. wie weit sich die Entwicklungen, welche die Physiker für solche Einzelfälle gemacht haben, sich hier einordnen. Aber es ist unmöglich, dieser Fragestellung hier nachzugehen.

zu tun. Wir finden den Übergang zur gewöhnlichen Wellenoptik, indem wir

$$q_i = c_i e^{\frac{2\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi(x,y,z))} \qquad (\varepsilon = \sqrt{-1}) \tag{2}$$

setzen und hier die „Wellenlänge" λ als kleine Größe betrachten, derart, daß wir in allen vorkommenden Gleichungen niedrige Potenzen von $1/\lambda$ gegen höhere wegwerfen dürfen.

Dann ergibt sich aus den Gleichungen $\square q_i = 0$ übereinstimmend:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{3}$$

Das ist die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung (28) von S. 110. Ist φ eine Lösung von (3), so stellen die Flächen

$$t = \varphi(x, y, z) + \text{const} \tag{4}$$

des dreidimensionalen Raumes für die verschiedenen Werte von t Lichtwellen eines zusammengehörigen Wellenzuges dar. Es sind — im elementaren Sinne — äquidistante Flächen mit einem gemeinsamen Normalensystem, wobei der längs einer solchen Normalen gemessene Abstand zweier, den Werten t_1 und t_2 entsprechenden Flächen $c\,|\,t_1 - t_2\,|$ beträgt. Die Normalen selbst nennen wir die zu dem Wellenzuge gehörigen Lichtstrahlen. Sie sind die Projektionen der singulären geodätischen Linien (der „Charakteristiken"), welche im Raume der x, y, z, t die Mannigfaltigkeiten (4) überdecken.

Das wäre das Werkzeug der geometrischen Optik. Um zur vollen Wellenoptik zu kommen, entnehmen wir der Divergenzbedingung (1)

$$c_1 \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + c_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{c_4}{c^2} = 0 \tag{5}$$

und berechnen dann nach der Formel (14) S. 104 den elektrischen Vektor (X, Y, Z) und den magnetischen Vektor (L, M, N). Wir finden:

$$X = \frac{2\varepsilon\pi}{\lambda} e^{\frac{2\varepsilon\pi c}{\lambda}(t-\varphi)} \cdot \left(c_1 + c_4 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \quad \text{usw.} \tag{6}$$

$$L = \frac{2\varepsilon\pi}{\lambda} e^{\frac{2\varepsilon\pi c}{\lambda}(t-\varphi)} \cdot \left(c_2 \frac{\partial\varphi}{\partial z} - c_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad \text{usw.} \tag{7}$$

Hieraus als identische Folgerung

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial x} + M\frac{\partial\varphi}{\partial y} + N\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

und vermöge (5) ebenso:

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Die magnetische, wie die elektrische Schwingung, sind also beide zur Wellenfläche tangential. Ferner:

$$XL + YM + ZN = 0; \tag{10}$$

die zweierlei Schwingungen stehen aufeinander senkrecht.

Endlich berechnen wir noch:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 + M^2 + N^2 = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - \frac{c_4^2}{c^2}\right) e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)}, \tag{11}$$

woraus sich nach (48), S. 100 für die spezifische Energie des Feldes ergibt:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2 c^2}\left(c_1^2 + c_1^2 + c_3^2 - \frac{c_4^2}{c^2}\right) e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)} \tag{12}$$

Der Poynting-Vektor aber ((48) ebenda), der wegen (9), (10) längs des Lichtstrahls und natürlich im Sinne der fortschreitenden Wellenbewegung gelegen ist, bekommt die Länge:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2 c}\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - \frac{c_4^2}{c^2}\right) e^{\frac{4\pi\varepsilon c}{\lambda}(t-\varphi)} \tag{13}$$

Alles dies ist einfach genug; ich führe gern an, daß ich auf den genauen Grenzübergang, der von (1) zu (3) führt, erst von Debye aufmerksam gemacht worden bin.

C. Von der Anpassung der Mechanik an die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe.

Nachdem wir die Lorentzgruppe für sich und in ihren grundlegenden Bedeutung für die Elektrodynamik einigermaßen haben kennen lernen, wird es sich darum handeln, die klassische Mechanik, die nach unseren Darlegungen unter A. dem Relativitätsprinzip der Galilei-Newton-Gruppe angepaßt ist, so umzuformen, daß sie sich dem Relativitätsprinzip der Lorentzgruppe einfügt. Die theoretische Möglichkeit hierfür liegt darin, daß die Lorentzgruppe, wie schon erwähnt, für $c \to \infty$ in die Galilei-Newton-Gruppe übergeht.

§ 1. Der Grenzübergang von der Lorentzgruppe zur Galilei-Newton-Gruppe.

Man pflegt den Übergang zur Galilei-Newton-Gruppe gewöhnlich an die spezielle Lorentztransformation anzuknüpfen, die wir oben (S. 72) so schrieben:

$$x' = \frac{x + cqt}{\sqrt{1-q^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{\frac{qx}{c} + t}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Setzt man nämlich hier $cq = v$ und vernachlässigt die Terme $\frac{v}{c^2}$ und $\frac{v}{c^2}$, so bekommt man:

(1) $$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

was eine Substitution der Galilei-Newton-Gruppe ist. Man müßte hier anschließend nun einen entsprechenden Grenzübergang für ein volles System erzeugender Operationen der Lorentzgruppe machen. Wir hier können alle solche Betrachtungen beiseite lassen, indem wir uns darauf berufen, daß aus der independenten Darstellung der Lorentzgruppe durch Biquaternionen die Galilei-Newton-Gruppe hervorgeht, indem man ε^2 nicht $= -\frac{1}{c^2}$, sondern $= 0$ setzt; vgl. die Angaben von S. 87.

Hierbei wird, wie schon oben (S. 56) ausgesprochen, die G_{10} der vierdimensionalen Welt imprimitiv, indem sich bei ihr die Mannigfaltigkeiten

(2) $$t = \text{const}$$

nur mehr untereinander vertauschen. Die früheren, durch $dx^2 + \cdots - c^2\,dt^2 = 0$ gegebenen „Mongeschen Kegel" gehen dabei in die diesen Mannigfaltigkeiten angehörigen doppeltgezählten Elemente $dt^2 = 0$ über. Damit ändert die „affine" Maßbestimmung der Lorentzgruppe durchaus ihren Charakter. Die Gleichung des „fundamentalen Ellipsoids" in Ebenenkoordinaten, die nach S. 105 die Gestalt hatte:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \frac{\nu_4^2}{c^2} = 0$$

geht nun in die quadratische Gleichung von doppelt verschwindender Determinante (vom Range 3 über):

(3) $$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 0\,.$$

In Punktkoordinaten verlangt dies ausgeartete Gebilde zu seiner Darstellung nicht weniger als 3 Gleichungen:

(4) $$\xi_4 = 0\,, \quad \xi_5 = 0\,, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0\,,$$

es ist nichts anderes als der Kugelkreis der gewöhnlichen dreidimensionalen metrischen Geometrie, aufgefaßt als ein Gebilde der vierdimensionalen Welt. Der Ausdruck für den zeitlich genommenen „Abstand" zweier Elemente:

$$\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}{c^2}}$$

degeneriert jetzt zu

(5) $$t_1 - t_0\,,$$

und nur, wenn $t_1 - t_0$ verschwindet, wird der im gewöhnlichen Sinne den Abstand bezeichnende Ausdruck:

(6) $$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

eine invariante Bedeutung behalten.

Die Vorstellung von Weltlinien, welche das vierdimensionale Kontinuum der x, y, z, t durchfurchen und dabei einen bestimmten Fortschreitungssinn haben, können wir natürlich festhalten. Das Element

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}}$$

wird einfach dt, so daß zwischen der „Eigenzeit" eines materiellen Punktes und der „Zeit schlechthin" kein Unterschied mehr zu machen ist. An Stelle des „Richtungsvektors" der Weltlinie (S. 108), nämlich $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, tritt nun

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad 1, \tag{7}$$

an Stelle ihres Krümmungsvektors $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ (ebenda)

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}, \quad 0. \tag{8}$$

Ich habe bei diesen Angaben die gewöhnliche Darstellung bereits so umgeformt, daß ich die der Lorentzgruppe entsprechenden symmetrischen Begriffsbildungen voranstellte. Dies scheint mir bequemer als das umgekehrte Verfahren, von den traditionellen Begriffen ausgehend jeweils ad hoc die richtige Lorentzformel zu suchen[1]).

---

[1]) Vielleicht darf ich den Gegensatz noch genauer an dem skalaren Begriff des Krümmungsradius erläutern: Hierfür gab ich auf S. 108 bereits die Formel:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\ddot{t}^2 - \frac{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}{c^2}} \tag{9}$$

(die Dimension dieses ϱ ist die einer „Zeit", und es wird für eine zeitartige Weltlinie reell). Als Parameter aber, nach dem differenziert wird, ist die der Weltlinie zugehörige „Eigenzeit" genommen. Führt man statt ihrer irgend einen anderen Parameter ein und bezeichnet die nach ihm genommenen Differentialquotienten der x, y, z, t vorübergehend durch Akzente, so ist (9) durch die allgemeinere Formel zu ersetzen:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'' - c^2t't'') - (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2 - c^2t''^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)^3}} \tag{10}$$

(die sich im Falle der Eigenzeit auf (9) reduziert). Wir wollen nun das Koordinatensystem x, y, z, t insbesondere so wählen, daß wir die Tangente der Weltlinie an der gerade betrachteten Stelle als t-Achse nehmen und damit x', y', z' als 0 voraussetzen (also auf „Ruhe transformieren", wie wir es S. 96 mit Minkowski nannten). Das Koordinatensystem mag ferner um die t-Achse so gedreht werden, daß auch x'', y'' gleich Null sind. Endlich soll als Parameter der Weltlinie das t des so eingeführten Koordinatensystems selbst gewählt werden. Dies gibt:

$$t' = 1, \quad t'' = 0, \quad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Aus Formel (10) wird aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{i}{c}\frac{d^2z}{dt^2} \tag{11}$$

§ 2. Dynamik eines Massenpunktes.

Die Dynamik des einzelnen Massenpunktes entwickeln wir genau so, wie es schon S. 96 bei der Einwirkung eines elektromagnetischen Feldes auf ein Elektron geschah, indem wir nämlich dem Punkte eine skalare Masse m beilegen, von einer auf ihn wirkenden „Viererkraft"

$$P_x, P_y, P_z, P_t$$

reden, die ein kogredienter[1]) Vektor sein soll, und

$$m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z, \quad m\ddot{t} = P_t \tag{1}$$

setzen. Da die Gleichung gilt

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} - c^2\dot{t}\ddot{t} = 0,$$

müssen wir die Kraftkomponente stets der entsprechenden Bedingung

$$\dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z - c^2\dot{t}P_t = 0 \tag{2}$$

unterworfen denken: Die Viererkraft steht also immer (im Sinne unserer Maßbestimmung) auf dem Richtungsvektor des Massenpunktes senkrecht.

Wir werden der Gleichung (2) identisch genügen, indem wir, unter Aufnahme des beim Elektron geltenden Ansatzes (S. 97), jetzt rein formal 6 Größen, X, Y, Z, L, M, N einführen, die nur noch von den x, y, z, t des Massenpunktes abhängen:

$$\left\{\begin{aligned} P_x &= \frac{M\dot{z} - N\dot{y}}{c} + X\dot{t} \\ P_y &= \frac{N\dot{x} - L\dot{z}}{c} + Y\dot{t} \\ P_z &= \frac{L\dot{y} - M\dot{x}}{c} + Z\dot{t} \\ P_t &= \frac{X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}}{c^2} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Insbesondere werden wir von einem Viererpotential reden, wenn wir diese 6 Größen, wie damals, als Großrotation eines Vierervektors darstellen können. Bei Zugrundelegung der x, y, z, t schreiben sich die betreffenden Formeln, wie schon auf S. 104 angegeben, so:

$$\left\{\begin{aligned} &X = \frac{1}{c}\frac{\partial q_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial q_t}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{c}\frac{\partial q_y}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial q_t}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{c}\frac{\partial q_z}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial q_t}{\partial z} \\ &L = \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z}, \quad M = \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Hier ist $\frac{d^2 z}{d t^2}$ das, was Minkowski die *Ruhebeschleunigung* des gerade betrachteten materiellen Punktes nannte. Dieser Ausdruck ist dann von vielen Autoren aufgenommen worden. Mir scheint es viel überzeugender, die Formel (9) bzw. (10) voranzustellen.

[1]) Zu dieser Terminologie vgl. Note 1 S. 167. (H.)

Es scheint aber von vornherein keine Notwendigkeit vorzuliegen, diese q_x, q_y, q_z, q_t auch noch, wie im Falle der Maxwellschen Gleichungen, den Bedingungen $\square q_i = 0$, Div $q = 0$ zu unterwerfen. Im übrigen können wir die Ansätze (3), (4), wie auf S. 97, zu einem „Hamiltonschen Prinzip" zusammenfassen

$$(5)\qquad \delta \int \left(\frac{c\,m}{2} (c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) + (\dot{t} P_t + \dot{x} P_x + y P_y + \dot{z} P_z) \right) d\tau = 0\,,$$

auch diejenigen Modifikationen anschließen, von denen damals die Rede war.

Das Wichtigste bei diesen Ansätzen ist jedenfalls das Auftreten von 4 koordinierten Bewegungsgleichungen (1) nebeneinander. Nennen wir

$$(6)\qquad m\dot{x}\,,\quad m\dot{y}\,,\quad m\dot{z}\,,\quad m\dot{t}$$

die 4 *Impulskomponenten*, so können wir aus (1) die 4 Impulssätze herauslesen:

$$(7)\quad d\,(m\dot{x}) = P_x\,d\tau\,,\quad d\,(m\,y) = P_y\,d\tau\,,\quad d\,(m\dot{z}) = P_z\,d\tau\,,\quad d\,(m\dot{t}) = P_t\,d\tau$$

und in ihnen den genauen Ausdruck für das in unserer Mechanik geltende Trägheitsprinzip erblicken. Die drei ersten dieser Sätze entsprechen natürlich den 3 Impulssätzen der gewöhnlichen Mechanik; es ist nun höchst bemerkenswert, daß der vierte beim Grenzübergang zur gewöhnlichen Mechanik direkt den Satz der lebendigen Kraft liefert; damit wird die Zusammengehörigkeit des letzteren mit den üblichen Impulssätzen, von der wir schon oben S. 57 gehandelt haben, aus einer natürlichen Quelle gewonnen. Die Rechnung verläuft ganz einfach. Schreiben wir unseren neuen (vierten) Impulssatz so:

$$(8)\qquad d\left(m\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}\right) = \frac{P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz}{c^2}\sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}}$$

(wo $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, wie bisher, $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$ und x', y', z' im Gegensatz dazu $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ bedeuten sollen; es ist bei der Umsetzung nur von der Beziehung $d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$ Gebrauch gemacht). Lassen wir bei den Quadratwurzeln nunmehr Reihenentwicklungen Platz greifen, so ergibt sich:

$$(9)\qquad d\left(\frac{m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \cdots\right) = (P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz)\,(1 + \cdots)\,.$$

Hier nun werden die sämtlichen mit ... angedeuteten Glieder beim Grenzübergang zu $c = \infty$ wegfallen, während $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ in x', y', z' übergehen, so daß in der Tat der gewöhnliche Satz der lebendigen Kraft

$$(10)\qquad d\left(\frac{m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2}\right) = P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz$$

herauskommt.

Die gleiche Koordinierung der 3 Impulssätze mit dem Energiesatz war uns im Gebiet der Maxwellschen Gleichungen bereits auf S. 101 entgegen getreten.

Für die geschichtliche Auffassung der Mechanik aber ergibt sich ein merkwürdiges Resultat. Es ist zwei Jahrhunderte her, daß zwischen den Cartesianern und den Leibnizianern der lebhafteste Streit tobte, ob die „Quantität der Bewegung" oder „die lebendige Kraft" der wichtigere Grundbegriff sei, ob also, in moderner Weise ausgedrückt, die Impulssätze oder der Energiesatz den Vorrang haben. Jetzt lernen wir, daß überhaupt kein Gegenstand des Streites da war, daß vielmehr die beiden Gegner dieselbe Sache, nur von verschiedenem Standpunkt aus, vor Augen hatten.

§ 3. Zur Theorie des starren Körpers.

Die große Rolle, welche der Begriff des starren Körpers in der klassischen Mechanik spielt, braucht nicht weiter betont zu werden. Es lag also nahe, diesen Begriff irgendwie auf die Lorentzmechanik zu übertragen. Für manchen Physiker scheint es hinterher allerdings fast selbstverständlich, daß kein rechtes Analogon gefunden werden konnte, weil man doch mit dem Begriff der Starrheit die Idee instantaner Kraftübertragung im Innern des Körpers verbindet, was mit dem Relativitätsprinzip der Lorentzgruppe unvereinbar scheint. Die Schwierigkeit der Übertragung beginnt aber nicht erst bei der Einführung des Kraftbegriffs, sondern liegt bereits in den kinematischen Verhältnissen. Es scheint mir nützlich, dies klarzustellen und dabei auch den Versuchen, welche die Aufstellung eines Analogons bezweckten, im Einzelnen nachzugehen.

Der starre Körper der klassischen Mechanik ist ein Aggregat von Anfang an gleichzeitiger Punkte, das irgendwelchen Galilei-Newton-Transformationen unterworfen werden kann. Die Zahl dieser Transformationen ist, wie wir wissen, ∞^{10}, aber in der vorausgesetzten Gleichzeitigkeit der Ausgangslagen seiner Punkte liegt, daß der zugrunde gelegte starre Körper in der vierdimensionalen Welt x, y, z, t doch nur ∞^7 Lagen annimmt. In der Tat ziehen sich die in den bezüglichen Substitutionsformeln (II, S. 54) vorkommenden 3 Aggregate:

$$\varepsilon_1 t + \xi_1, \quad \varepsilon_2 t + \xi_2, \quad \varepsilon_3 t + \xi_3$$

für Punkte, welche von Hause aus dasselbe t haben, auf dieselben 3 Einzelterme zusammen. Es kommt dies darauf hinaus, daß die Mannigfaltigkeit

$$t = t_0 \tag{1}$$

bei den dreifach unendlich vielen Galilei-Newton-Transformationen

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= x + \varepsilon_1 (t - t_0)\,, \\ y' &= y + \varepsilon_2 (t - t_0)\,, \\ z' &= z + \varepsilon_3 (t - t_0)\,, \\ t' &= t \end{aligned}$$

punktweise ungeändert bleibt. — Indem man die Zeit t nicht weiter mitzählt, drückt man die hiermit berührte Tatsache in der traditionellen Mechanik gewöhnlich dahin aus, daß der starre Körper 6 Grade der Freiheit besitzt.

Nun ist a priori klar, daß bei der Lorentzgruppe hierzu kein unmittelbares Analogon existiert. Denn eine Substitution, welche die Mannigfaltigkeit (1) punktweise ungeändert läßt, ist notwendigerweise von der Form

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t;$$

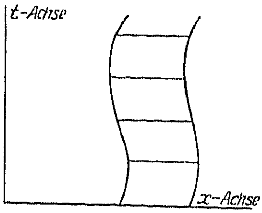

Fig. 1.

geht doch auch (1) bei beliebigen Lorentztransformationen in ∞^4 Lagen

$$(3)\qquad \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \varepsilon_4 t + \zeta_4 = 0$$

über. Wollten wir den starren Körper als irgend ein in (1) oder in (3) gelegenes Punktsystem definieren, auf das sämtliche Lorentzsubstitutionen angewandt werden sollen, so würde er in der Welt x, y, z, t notwendigerweise ∞^{10} verschiedene Lagen annehmen. — Die Sachlage ist also gründlich verschieden und es ist nur noch die Frage, ob wir die auf den einzelnen starren Körper auszuübenden Lorentzsubstitutionen nicht doch noch einschränkenden Bedingungen unterwerfen können, welche für die Kinematik im engeren Sinne eine gewisse Analogie aufrechterhalten.

In der „Kinematik im engeren Sinne" betrachtet man Scharen von ∞^1 Lagen, welche ein starrer Körper nacheinander annehmen kann. Um hierfür ein plastisches Bild zu haben, wollen wir die Weltlinien betrachten, welche die einzelnen Punkte des starren Körpers bei einer solchen „Bewegung" beschreiben.

In Figur 1 sind unter der vereinfachenden Annahme, daß alle diese Weltlinien in der x, t-Ebene liegen, zwei solche Weltlinien eingetragen. Dann ist ohne weiteres klar — wir sind bei der Galilei-Newton-Gruppe —, daß sie wegen der Starrheit des Körpers in horizontaler Richtung gemessen äquidistant sind, und daß diese Äquidistanz die einzige Bedingung ist, der sie genügen müssen. Dies kann man nun in einer gewissen künstlichen Form ausdrücken, welche eine Verallgemeinerung gestattet. In der Welt x, y, z, t der Lorentzgruppe wird man irgend 2 Richtungen orthogonal nennen, wenn die Bedingung:

$$(4)\qquad dt\,d't - \frac{dx\,d'x + dy\,d'y + dz\,d'z}{c^2} = 0$$

erfüllt ist. Dies geht für $c = \infty$ in die triviale Gleichung über:

$$dt\,d't = 0 \tag{5}$$

(wie auch geometrisch klar ist, wenn man die Mongeschen Kegel der Lorentzwelt in die doppeltzählenden Ebenen $t = t_0$ der Galilei-Newton-Welt übergehen läßt). In letzterer kann man also zwei Richtungen zueinander orthogonal nennen, wenn längs der einen $t =$ const ist (wenn die eine in der Figur horizontal verläuft). Wir werden im Sinne dieser Ausdrucksweise sagen dürfen, daß im Galilei-Newton-Falle die Weltlinien irgend zweier Punkte eines starren Körpers orthogonal äquidistant sind[1]).

Diese Formulierung ist zwar in hohem Grade willkürlich, aber man hat an sie angeknüpft, um die Beweglichkeit des starren Körpers für den Fall der Lorentzgruppe zu definieren.

So ist es zunächst von Born 1909 geschehen (Ann. d. Phys. [4] 30) und es sind dann von Ehrenfest (Physikalische Zeitschr. X, 1909), Herglotz und Fritz Noether (Ann. d. Phys. [4] 31, 1910) aus diesem Bornschen Ansatze die näheren Konsequenzen gezogen worden. Sollen die Weltlinien der Punkte eines starren Körpers auch im Lorentzfalle „normal äquidistant" sein, so sind, wie insbesondere Herglotz zeigt, für die Bewegung des starren Körpers noch zwei Fälle möglich:

(a) Die Reihe der unendlich vielen Ortsänderungen in der vierdimensionalen Welt besteht aus den Wiederholungen einer und derselben infinitesimalen Lorentztransformation.

(b) Die Weltlinien der verschiedenen Punkte des starren Körpers treten in jedem Augenblicke senkrecht aus der ihn tragenden linearen Mannigfaltigkeit hervor.

Ad (a) dürfen wir als Beispiel die Schraubenbewegung ansetzen:

$$\left|\begin{aligned} x' &= \cos\omega \cdot x - \sin\omega \cdot y, \\ y' &= \sin\omega \cdot x + \cos\omega \cdot y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned}\right. \qquad (\omega \text{ ein Parameter.}) \tag{6}$$

Für die dreidimensionale Auffassung „rotiert" dann der starre Körper mit konstanter Geschwindigkeit um die z-Achse (an deren Stelle man durch Koordinatentransformation natürlich eine beliebige Gerade setzen kann). Eine beschleunigte Rotation dagegen, also auch eine von der

---

1) Der Winkel, den die Weltlinien des starren Körpers im Galilei-Newton-Falle mit den Mannigfaltigkeiten $t =$ const bilden, muß keineswegs $= \frac{\pi}{2}$ gesetzt, sondern kann beliebig angenommen werden. Denn der für die Lorentzgruppe geltende Ausdruck des Winkels zweier Fortschreitungsrichtungen:

$$\arccos \frac{c^2\,dt\,d't - dx\,d'x - dy\,d'y - dz\,d'z}{\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,\sqrt{c^2\,d't^2 - d'x^2 - d'y^2 - d'z^2}}$$

wird für $c = \infty$ und $dt\,d't = 0$ unbestimmt.

Ruhe beginnende, würde unser starrer Körper nicht ausführen können, weil die Weltlinien seiner Punkte, Schraubenlinien von wechselnder Steighöhe, normal nicht äquidistant sein können (wie man durch Nachrechnen bestätigt).

Mehr Interesse hat der Fall (b) gefunden, den wir Normalenbewegung nennen wollen. Trotzdem dadurch gewisse Feinheiten verwischt werden, wollen wir uns zu seiner Behandlung wieder der „orthogonalen" Koordinaten

$$x,\ y,\ z,\ l = ict$$

bedienen und uns so ausdrücken bzw. die Figuren so zeichnen, als wenn diese Größen reell wären.

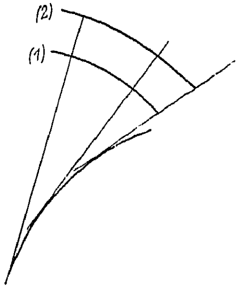

Fig. 2.

Figur 2 mag wieder den Fall erläutern, wo y und z konstant sind. Die Zeichenebene ist also die x, l-Ebene. Die Weltlinien der einzelnen Punkte des starren Körpers erscheinen dann als orthogonale Trajektorien irgend einer Geradenschar, d. h. sie sind die zu einer vorgegebenen Evolute gehörigen Evolventen.

Was die Mannigfaltigkeit von (a) und (b) angeht, so gibt es nur ∞^{10} Bewegungen (a) — weil doch durch die zugrundegelegte infinitesimale Transformation der Lorentzgruppe der ganze Verlauf der Bewegung bestimmt ist; — im Falle der Normalenbewegung aber ist die Bewegung festgelegt, wenn die Weltlinie eines beliebigen Punktes des starren Körpers beliebig vorgegeben ist.

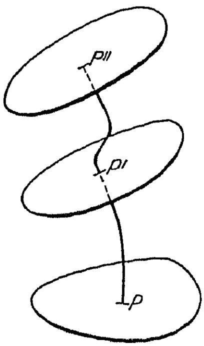

Fig. 3.

Um dies einzusehen, werde wieder eine Figur, dieses Mal im Raum der x, y, l betrachtet (Figur 3). Wir haben erstlich die Weltlinie P, P', P'', dann als Normalebenen zu ihr die linearen Mannigfaltigkeiten (3), welche die Punkte des starren Körpers tragen. Alle anderen Weltlinien (und damit die ganze Bewegung des starren Körpers) ergeben sich dann eindeutig als normale Trajektorien der damit gegebenen Schar linearer Mannigfaltigkeiten.

Hiermit ist die „Normalbewegung" in ihrem allgemeinen Charakter festgelegt; wir wollen noch ihre infinitesimalen Transformationen und dann die von ihnen erzeugten endlichen Transformationen betrachten.

Mögen wir die instantane Lage des starren Körpers innerhalb $l = 0$ nehmen. Jeder Punkt des starren Körpers soll nun aus $l = 0$ senkrecht hervortreten, es soll also für ihn $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ sein. Mithin lautet die infinitesimale Transformation (wenn wir gleich dafür sorgen, daß es eine orthogonale Transformation wird):

$$
(7)\qquad
\begin{array}{rrrrl}
x' = & x + & 0 + & 0 + \delta\varepsilon_1 \cdot l + 0\,, \\
y' = & 0 + & y + & 0 + \delta\varepsilon_2 \cdot l + 0\,, \\
z' = & 0 + & 0 + & z + \delta\varepsilon_3 \cdot l + 0\,, \\
l' = -\,\delta\varepsilon_1 \cdot x & -\,\delta\varepsilon_2 \cdot y & -\,\delta\varepsilon_3 \cdot z + & & l + \delta\zeta_4\,.
\end{array}
$$

Da hier 4 infinitesimale Inkremente ($\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\zeta_4$) zur Verfügung stehen, werden wir sagen:

Der starre Köper besitzt im Falle (b) im Unendlichkleinen 3 Freiheitsgrade.

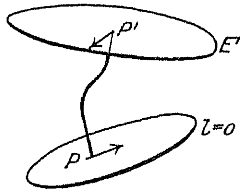

Fig. 4.

Es liegt nun der Fehlschluß nahe, daß der starre Körper im Endlichen nur ∞^4 Lagen annehmen könne. Dem ist aber nicht so. Vielmehr kann er alle durch Lorentztransformationen herstellbaren Lagen erreichen. Da ich diesen Punkt in der Literatur nicht besonders behandelt finde, will ich etwas näher darauf eingehen und knüpfe dabei an Figur 4 an.

Ich sage zunächst: ich kann (durch eine Normalenbewegung) jeden Punkt P von $l = 0$ in jedem Punkt P' und gleichzeitig die durch P hindurchgehende „Ebene" $l = 0$ in jede durch P' gehende Ebene E' überführen. Zu diesem Zweck habe ich nur durch P irgendeine gegen $l = 0$ senkrechte Kurve zu ziehen — welche in P' senkrecht gegen E' mündet — und diese Kurve als Weltlinie von P zu nehmen. Aber noch mehr! Ich kann bei der großen Willkür in der Wahl der Kurve PP' auch noch jedes durch P innerhalb $l = 0$ laufende Azimut in jedes durch P' in der Ebene E' laufende Azimut überführen (was in der Figur durch die kleinen, den Punkten P und P' beigesetzen Pfeile angedeutet sein soll).

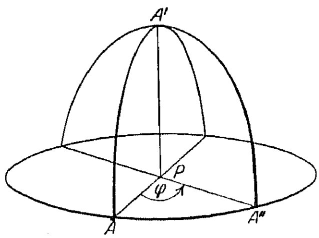

Fig. 5.

Um das zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß bei festgehaltenem P die Ebene $l = 0$ durch eine Reihe von Normalenbewegungen schließlich in sich selbst um einen beliebigen Winkel verdreht werden kann.

Man betrachte, um das einzusehen, Figur 5. Gemeint ist: Man drehe die Ebene $l = 0$ zunächst um die Richtung des Ausgangsazimuts PA als Achse, bis sie auf ihrer ursprünglichen Lage senkrecht steht, bringe sie von da aus durch Drehung um die Normale PA' ihrer ursprünglichen Lage in der Richtung des neuen Azimuts PA'' und lege sie durch abermalige Drehung um 90^0, jetzt um die Achse PA'', derart in ihrer Anfangslage $l = 0$ zurück, daß sie mit dieser gleichstimmig zusammenfällt.

Daß die Zahl der Freiheitsgrade im Endlichen solcherweise mit der im Unendlichkleinen nicht stimmt, darf nicht überraschen. In seiner nachgelassenen Mechanik (l. c. S. 68) hat Hertz Entsprechendes ausführlich für die auf fester Unterlage rollende Kugel auseinandergesetzt. Sie hat nur 3 Freiheitsgrade im Unendlichkleinen, 5 im Endlichen. Hertz hat für dieses Verhalten den Terminus geprägt, daß die Bedingungen, welche die Beweglichkeit der Kugel im Unendlichkleinen einschränken, nicht „*holonom*" seien. Schließlich ist die Sache dem Mathematiker, der sich mit der Theorie des Pfaffschen Problems beschäftigt hat, wohlbekannt. Bedinge ich (um beim einfachsten Falle von 3 Variablen zu bleiben)

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

so ist der Punkt x, y, z durch diese Bedingung nur dann an eine bestimmte Fläche $F =$ const gebunden, wenn sich die linke Seite durch Multiplikation mit irgendeinem M in die Gestalt df setzen läßt, was die Bedingung

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0$$

erfordert; andernfalls kann unser Punkt noch an jede beliebige Stelle des Raumes gebracht werden.

Resumieren wir, so hat auch die mit der Annahme der Lorentzgruppe verträgliche zweite Möglichkeit für die Bewegung eines starren Körpers, die „Normalenbewegung", mit derjenigen, die im Falle der Galilei-Newton-Gruppe auftritt, wenig Ähnlichkeit. Um wenigstens im Unendlichkleinen die Übereinstimmung zu sichern, hat Born 1910 in den Göttinger Nachrichten einen anderen Vorschlag gemacht, der sich etwa so formulieren läßt:

„Jeder starre Körper besitzt einen Zentralpunkt P_0, dessen Weltlinie stets senkrecht auf der linearen Mannigfaltigkeit (3) steht, welche den starren Körper enthält. Um diesen Punkt aber kann sich der starre Körper innerhalb dieser Mannigfaltigkeit beliebig drehen."

Diese Definition würde also, wenn wir wieder mit der linearen Mannigfaltigkeit $l = 0$ beginnen, die infinitesimale Transformation mit 7 unendlich kleinen Inkrementen zulassen:

$$\begin{aligned}
x' &= \qquad x + \delta\chi\cdot y - \delta\psi\cdot z + \delta\varepsilon_1\cdot t + 0\,,\\
y' &= -\delta\chi\cdot x + \qquad y + \delta\varphi\cdot z + \delta\varepsilon_2\cdot t + 0\,,\\
z' &= \delta\psi\cdot x - \delta\varphi\cdot y + \qquad z + \delta\varepsilon_3\cdot t + 0\,,\\
t' &= -\delta\varepsilon_1\cdot x - \delta\varepsilon_2\cdot y - \delta\varepsilon_3\cdot z + \qquad t + \delta\xi_4\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Die Paradoxien sind damit aber nicht aus der Welt geschafft; denn im Endlichen behält der Körper gewiß seine Fähigkeit, die er schon vorher besaß, ∞^{10} Lagen anzunehmen.

Es ist mir nicht bekannt, daß jemand diesen Ansatz weiter verfolgt hätte. Die allgemeine Auffassung ist wohl immer mehr die geworden, daß man den Begriff des starren Körpers, den noch Hertz zum Fundament seiner Mechanik machen wollte, in der Lorentzmechanik kurzer Hand beiseite lassen soll. Man sieht, welche Änderungen unsere physikalischen Grundanschauungen erleiden.

Schlußbemerkung.

Die letzten Paragraphen zeigen, daß in der Lorentzmechanik doch mancherlei anders zu fassen ist, als in der klassischen Theorie. Überall da, aber auch nur da, wird ein prinzipieller Unterschied eintreten, wo in der letzteren die Vorstellung zeitloser Übertragung grundlegend ist. Deshalb läßt sich die Mechanik der Kontinua der Lorentzgruppe unmittelbar anpassen. Ich muß mich aber hier darauf beschränken, dieserhalb erneut auf die wichtige Arbeit von Herglotz über Elastizitätstheorie (Ann. d. Phys. [4], 36, 1911) zu verweisen. Wir selbst müssen uns, dem Zweck dieser Darstellung entsprechend, auf die elementaren Anfänge der Mechanik beschränken (wie wir dies auch bei der Elektrodynamik getan haben). Unser Ziel kann nicht sein, ein Lehrbuch der mathematischen Physik zu ersetzen. Vielmehr handelt es sich nur darum, fühlbar zu machen, daß die Physiker die mathematischen Hilfsmittel, deren sie bei der Durchführung ihrer modernen Spekulationen bedürfen, in der Mathematik des 19. Jahrhunderts fertig ausgebildet vorfinden.

Erläuterungen zum zweiten Kapitel.

1. S. 64 Z. 10: Hier liegt ein im Riccikalkül allgemein angewandtes Verfahren vor, das „Überschiebung" oder „Verjüngung" genannt wird (vgl. Eddington l. c. S. 205).

2. S. 67: Daß die Gleichungen der Elektronentheorie nicht endgültig richtig sein konnten, folgt bereits aus der Existenz der Elektronen selbst, die nach den alten Feldgleichungen zunächst nicht zu verstehen ist. Man hat nun versucht, die Feldgleichungen so abzuändern, daß die Elektronen als spezielle Lösungen aus ihnen herauskommen[1]) (Mie, Einstein, Hilbert, Weyl, Eddington). Jedoch erlangte man auf diesem Wege keine befriedigenden Resultate. Inzwischen war aber die klassische Elektronentheorie auch noch von einer anderen Seite her erschüttert worden, nämlich durch die Entdeckung der Quantenerscheinungen (Planck, Einstein) und die daran anschließende Erforschung der Atomstruktur[2]) (insbesondere durch Bohr). Der Ausgangspunkt lag

[1]) Einen zusammenfassenden Bericht gibt W. Pauli jr. in seinem Artikel über Relativitätstheorie in der Enc. d. Math. Wiss. Bd. V (19), S. 749ff. Siehe ferner noch F. Jüttner: Math. Ann. Bd. 87. 1922; A. Einstein: Berl. Ber. 1922—1924; S. A. Eddington: Relativitätstheorie. Berlin 1925.

[2]) Zusammenfassende Darstellungen: A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. Braunschweig 1924; M. Born: Atommechanik. Berlin 1925.

dabei allerdings weniger auf Seiten der Elektrodynamik als auf Seiten der klassischen Mechanik, welcher noch zusätzlich gewisse Beschränkungen (die Quantenbedingungen) auferlegt wurden. In neuester Zeit hat endlich eine Entwicklung dei Quantentheorie begonnen, die sich eine einheitliche Beschreibung aller Strahlungs- und Atomvorgänge zum Ziele setzt[1]) (Heisenberg, Born, Jordan, Schrödinger, Pauli, Dirac). Da diese Entwicklung sich noch im Fluß befindet und auch die Elektrodynamik selbst vorläufig nicht völlig mit eingearbeitet ist, kann zur Zeit nicht zusammenfassend darüber referiert werden.

3. S. 83 Z. 4: Schlußverfahren der „Quotientenregel". Vgl. Eddingten (l. c. S. 205) S. 70—73.

4. S. 83 Z. 12: Die Addition von $\frac{1}{2}\delta_{ik}\,\Omega$ ist erlaubt, weil $\frac{1}{2}\delta_{ik}\,\Omega$ ein zum vorher angegebenen kogredienter Tensor ist. Vgl. Anmerkung 4 zum ersten Kapitel.

5. S. 90 Z. 8 v. u.: Wäre nämlich an einer Stelle $\sum_k \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} = 0\ (i = 1, \ldots, 4)$ nicht erfüllt, so könnte man, ähnlich wie das bei bekannten Schlüssen der Variationsrechnung geschieht, das Integrationsgebiet so um die Stelle herumlegen, daß das Integral von Null verschieden wird.

Drittes Kapitel[2]).

Gruppen analytischer Punkttransformationen bei Zugrundelegung einer quadratischen Differentialform.

A. Die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen der klassischen Mechanik.

Vorbemerkung.

Bisher betrachteten wir nur Gruppen *linearer* Substitutionen irgendwelcher Veränderlicher $x_1, \ldots, x_n$. Unser Fortschritt soll jetzt sein, daß wir Gruppen *beliebiger* Substitutionen:

$$(1) \qquad x_1 = \varphi_1(y_1 \ldots y_n), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(y_1 \ldots y_n)$$

[1]) Die grundlegenden Arbeiten sind: W. Heisenberg: Zeitschr. f. Phys. Bd. 33, S. 879. 1925; M. Born und P. Jordan: Zeitschr. f. Phys. Bd. 34, S. 858. 1925; Heisenberg, Born und Jordan: Zeitschr. f. Phys. Bd. 35, S. 557. 1926; M. Born: Zeitschr. f. Phys. Bd. 40, S. 167. 1926; Jordan: Zeitschr. f. Phys. Bd. 40, S. 809. 1927; E. Schrödinger,: Verschiedene Arbeiten in den Ann. d. Phys., auch in Buchform: Abhandlungen zur Wellenmechanik. Ferner zahlreiche Abhandlungen von P. A. M. Dirac in Proc. of the roy. soc. of London.

[2]) Man vergleiche Anmerkung 1 am Kapitelschluß. (H.)

ins Auge fassen. Indem wir die $x_1 \ldots x_n$ zumeist als Punktkoordinaten in einem n-fach ausgedehnten Raume auffassen, sprechen wir kurzweg von Punkttransformationen. Es steht dabei frei, sich entweder das Koordinatensystem als fest und den Raum bzw. die in ihm gelegenen Gebilde als transformierbar anzusehen, oder, wie es zunächst bequemer ist, den R_n als fest und das Koordinatensystem als veränderlich (so daß also die (1) eine „Koordinatentransformation" vorstellen).

Die $x_1 \ldots x_n$ bzw. $y_1 \ldots y_n$ denken wir uns dabei bis auf weiteres als reelle Größen und beschränken unsere Betrachtungen auf ein solches Raumstück, innerhalb dessen die Funktionen φ, die wir der Einfachheit halber als analytisch voraussetzen werden, durchaus regulär verlaufen und eine nicht verschwindende Funktionaldeterminante haben[1]). Die Substitutionen (1) lassen sich dann innerhalb des uns interessierenden Bereiches eindeutig umkehren, der Gruppenbegriff also so fassen, daß in der Gruppe neben der Substitution (1) immer auch die inverse auftritt. Während aber die Gruppen linearer Substitutionen, die wir früher betrachteten, nur endlich viel Parameter enthalten, werden es nunmehr, allgemein zu reden, unendlich viele sein. Wir werden die φ_i sogar zumeist keinen anderen Beschränkungen unterwerfen, als den bereits voraufgeschickten; wir sprechen dann von der Gruppe aller Punkttransformationen und bezeichnen diese vielfach kurzweg als G_∞.

Immerhin besteht mit der Gruppe der linearen Substitutionen von n Veränderlichen der Kontakt, daß sich gemäß (1) die Differentiale dx_i homogen linear substituieren:

$$(2)\qquad \begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} dy_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} dy_n\,, \end{aligned}$$

ebenso auch die Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial x_i}$, die sich einfach zu (2) kontragredient umsetzen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \frac{\partial}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Hiermit ist der eigentliche Ausgangspunkt für alle folgenden Betrachtungen gegeben. Überall knüpfen wir an die Invariantentheorie der linearen Substitutionen an, wobei nur von vornherein beachtet werden muß, daß die Determinante der linearen Substitution (2) bzw. (3) — die Funktionaldeterminante der x nach den y — im allgemeinen nicht,

[1]) Diese Beschränkungen werden weiterhin, wo nicht das Gegenteil gefordert wird, immer stillschweigend vorausgesetzt.

wie wir bisher gewöhnlich von der Substitutionsdeterminante voraussetzten, gleich 1 sein wird.

Als geeignete Objekte unserer invariantentheoretischen Untersuchung erscheinen dementsprechend neben irgendwelchen (analytischen, in unserem Bereich eindeutigen) Funktionen $f(x_1 \ldots x_n)$ in erster Linie *Differentialformen*

$$F(x_1 \ldots x_n;\ dx_1 \ldots dx_n) \tag{4a}$$

oder auch

$$F\left(x_1 \cdots x_n;\ \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{4b}$$

die in den Differentialen bzw. den Differentiationszeichen homogen (im einfachsten Falle rational, ganz und homogen) sind — daneben dann allgemeinere Formen, welche mehrere Reihen von Differentialen dx_i, $d'x_i$, ..., jede homogen, bzw. von Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial x'_i}$, ..., jede Reihe homogen, oder auch, in geeigneter Homogenität, beiderlei Arten von Symbolen nebeneinander enthalten.

Natürlich ist es keineswegs unsere Absicht, eine Invariantentheorie dieser Formen bei Zugrundelegung unserer G_∞ systematisch zu entwickeln. Vielmehr beschränken wir uns auf solche verhältnismäßig einfachen Ansätze, welche für die mathematische Physik von besonderer Bedeutung geworden sind. Indem wir ihren historischen Werdegang, wie wir ihn auffassen, und ihre Tragweite in großen Zügen möglichst eindringlich auseinandersetzen, hoffen wir auch für weitere Kreise etwas Nützliches zu leisten.

Wir wenden uns zunächst nur zur Betrachtung einer einzelnen quadratischen Differentialform:

$$\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{5}$$

(die a_{ik} „in unserem Bereiche“ eindeutige, regulär verlaufende analytische Funktionen der $x_1 \ldots x_n$; die Determinante der a_{ik} ebenda von Null verschieden). Mit der so vorangestellten Beschränkung schließen wir ersichtlich an die Betrachtungen des vorigen Kapitels an, für welche die besondere quadratische Form

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \tag{6}$$

fundamental war. In der Tat ist es eine unserer Hauptabsichten, auseinanderzusetzen, wie sich aus der an (6) anknüpfenden, auf die Lorentzgruppe bezüglichen niederen („speziellen“) Relativitätstheorie der modernen Physiker in den letzten Jahren eine höhere („allgemeine“) Relativitätstheorie entwickelt hat, welche eine allgemeinere quadratische Differentialform von 4 Veränderlichen zugrunde legt und als Gruppe die G_∞ aller Punkttransformationen heranzieht[1]). Das

[1]) Das sollte im vierten Kapitel dieses Buchs geschehen, das Klein nicht mehr vollendet hat. (H.)

Sachverhältnis ist wieder dieses, daß der mathematische Apparat hierfür in der Hauptsache seit langem ausgebildet vorlag und nur der Inanspruchnahme durch neue physikalische Ideenbildungen bedurfte. Um dies klarzustellen, müssen wir mehr als ein Jahrhundert zurückgehen, bis zu der klassischen Formulierung, welche Lagrange der analytischen Mechanik in seinem Fundamentalwerk erteilt hat (Mécanique analytique, 1. Auflage 1788).

§ 1. Einführung der Lagrangeschen Gleichungen und ihrer Gruppe G_∞.

Wir stellen nur die Hauptpunkte, auf die es uns ankommt, in knapper Aufzählung zusammen. Dabei bedienen wir uns, wo es angezeigt ist, moderner Terminologie, beschränken uns überhaupt nicht auf Lagranges eigene Entwicklungen.

1. Die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen beziehen sich auf Systeme irgendwelcher Massenpunkte

$$m_i;\ x_i,\ y_i,\ z_i, \tag{1}$$

welche an irgendwelche „Bedingungsgleichungen"

$$\Phi = 0,\ \Psi = 0,\ \cdots \tag{2}$$

gebunden sein können derart, daß sich die x_i, y_i, z_i innerhalb des Bereiches, der uns gerade interessiert, als reguläre analytische Funktionen von n unabhängigen Parametern

$$q_1 \cdots q_n \tag{3}$$

darstellen lassen. Auf den einzelnen Punkt (1) soll eine Kraft mit den Komponenten X_i, Y_i, Z_i wirken; gesucht werden die Differentialgleichungen, denen unter diesen Umständen die $q_1 \ldots q_n$ als Funktionen der Zeit t genügen.

2. Die von Lagrange gegebenen Formeln verlangen bekanntlich nur, daß man einerseits die lebendige Kraft des Systems:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{4}$$

durch die q_α, $\dot{q}_\alpha$ ausdrückt, andererseits die Arbeit, welche die Kräfte bei einer virtuellen Verrückung der Angriffspunkte leisten, also

$$\delta A = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \tag{5}$$

in $\sum P_\alpha \delta q_\alpha$ umrechnet. Die Bewegungsgleichungen werden dann einfach:

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - P_\alpha = 0 .$$

3. Um die außerordentliche Tragweite dieser Gleichungen abzuschätzen, muß man sich klarmachen (was bei Lagrange merkwürdiger-

weise nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, was aber im Anschluß an Lagrange immer mehr oder minder bekannt gewesen ist), daß die Formeln, welche die x_i, y_i, z_i durch die q_α ausdrücken, neben den q_α gern auch die Zeit t enthalten können (wie dies beispielsweise notwendigerweise eintritt, wenn die Bedingungsgleichungen (2) ihrerseits bereits das t enthalten)[1]. Man hat nur bei der Berechnung von δA das t nicht mitzuvariieren, vielmehr allgemein zu setzen:

$$\delta A = \sum P_\alpha \delta q_\alpha . \tag{7}$$

Bei der Berechnung von T bzw. der nach der Zeit genommenen Differentialquotienten $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ kommt diese Abhängigkeit von t aber natürlich zur Geltung. Dementsprechend wird das umgerechnete T, allgemein zu reden, eine Gestalt haben:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta + \sum b_\alpha\, \dot{q}_\alpha \tag{8}$$

(unter den $a_{\alpha\beta}$, b_α Funktionen der q_α und des t verstanden). Neben dem in den $\dot{q}$ quadratischen Term tritt also ein Linearterm auf, der dann bei Ausrechnung der Gleichung (6) diejenigen Zusatzglieder liefert, welche man nach dem Astronomen Clairaut (1742) oder dem Techniker Coriolis (1832) zu nennen pflegt.

4. Der Beweis der Gleichungen (6) kann natürlich durch direkte Umrechnung der in den x, y, z geschriebenen Bewegungsgleichungen geleistet werden. Statt dessen bedient man sich meist des Variationsansatzes, den wir hier dahin formulieren, daß

$$\bar{\underline{\int}} (\delta T + \delta A)\, dt = 0 \tag{9}$$

sein soll, wofern wir im Integrationsintervall die q_α beliebig variieren, an den Grenzen aber festhalten[2].

In der Tat haben wir in dem Term

$$\bar{\underline{\int}} \delta T\, dt = \bar{\underline{\int}} \left(\Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) + \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) \right) dt \tag{10}$$

den zweiten Bestandteil nur in bekannter Weise durch partielle Integration umzuformen und die Definition von δA gemäß (7) heranzuziehen, um aus (9) die Formel zu erhalten:

$$\bar{\underline{\int}} \left[\sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)}{dt} + P_\alpha \right) \delta q_\alpha \right] dt = 0 , \tag{11}$$

die unmittelbar zu den Gleichungen (6) hinführt.

---

[1] Vgl. zu den Angaben des Textes überall den einführenden Artikel des Bandes 4 (Mechanik) der Math. Enzyklopädie: A. Voß, Die Prinzipien der rationellen Mechanik.

[2] Das Verschwinden der Variation an den Integrationsgrenzen wird wieder durch die Querstriche beim Integralzeichen angedeutet.

5. Wir fragen vor allem, wieso der Komplex der Lagrangeschen Gleichungen (6) gegenüber beliebigen Transformationen der Parameter q_α, genauer gesagt: gegenüber der G_∞ aller in unserem Bereiche regulären analytischen Substitutionen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(q'_1 \cdots q'_n, t') \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= \varphi_n(q'_1 \cdots q'_n, t') \\ t &= t' \end{aligned} \tag{12}$$

invariant ist. Die präzise Antwort hierauf gibt unser Variationsansatz. Wir haben bei unserer Frage T und damit δT, andererseits δA von vornherein als gegeben und damit als invariant anzusehen. Wir schließen, daß gleicherweise der unter dem Integralzeichen (11) stehende Integrand, also

$$\Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\right)}{dt} + P_\alpha\right)\delta q_\alpha \tag{13}$$

eine Invariante ist. Die linken Seiten der Gleichungen (6) sind nichts anderes als die mit negativem Zeichen genommenen, mit den verschiedenen δq_α in dieser Invariante verbundenen Koeffizienten. Nun werden wir den Komplex der δq_α selbst nach Analogie mit unseren früheren Entwicklungen einen *Vektor* nennen. Unsere Koeffizienten bezeichnen dann einen *kontragredienten* Vektor und die Invarianz unseres Gleichungskomplexes erscheint danach kurzweg darin begründet, daß er *das identische Verschwinden eines kontragredienten Vektors* verlangt.

6. Wir wollen unsere Auffassung von der in ihrer Wirkung vielleicht nicht ganz durchsichtigen partiellen Integration unabhängig machen. Wir erreichen dies, wenn wir den Term, der bei der partiellen Integration wegfällt, unter dem Integralzeichen beibehalten, nämlich statt (13) einfach schreiben:

$$\delta T - \frac{d}{dt}\left(\Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha\right) + \Sigma P_\alpha \delta q_\alpha \tag{14}$$

$\left(\text{was mit (13) übereinstimmt, weil } \delta \dot q_\alpha = \delta \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{d\,\delta q_\alpha}{dt}\right)$

Der Ausdruck (14) ist invariant, weil er aus lauter Invarianten (der Gruppe (12)) zusammengesetzt ist.

Wir haben damit genau Anschluß an die Art und Weise genommen, wie Lagrange selbst in seiner Mécanique analytique, I, 3. Aufl., S. 326[1]) vom Prinzip der virtuellen Verrückungen aus ohne Benutzung der Variationsrechnung zu seinen allgemeinen Gleichungen vordringt. In der Tat setzte er (ich halte dabei unsere Bezeichnungen fest), die durch das genannte Prinzip gegebene Gleichung

$$\Sigma\left((X_i - m_i\ddot x_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot y_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot z_i)\,\delta z_i\right) = 0 \tag{15}$$

[1]) Ges. Werke, Bd. 11.

direkt in folgende um:

$$(16) \quad \Sigma(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) - \frac{d}{dt}(\Sigma m_i(\dot{x}\delta x_i + \dot{y}\delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i))$$
$$+ \delta \Sigma\left(\frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\right) = 0,$$

wo nun die linke Seite mit (14) begrifflich direkt übereinstimmt. Herr Heun, der sich um das Verständnis von Lagranges analytischer Mechanik so große Verdienste erworben hat, nennt den Übergang von der linken Seite von (15) zu der von (16) geradezu *Lagranges Zentralgleichung*[1]). Zugleich hat er dem gedanklichen Inhalte von (16) folgende prägnante Form gegeben: Die virtuelle Arbeit der am System angreifenden Kräfte ist gleich der Änderungsgeschwindigkeit der „virtuellen Impulsarbeit" vermindert um die virtuelle Änderung der lebendigen Kraft.

§ 2. Die G_∞ der Lagrangeschen Gleichungen und die Galilei-Newton-Gruppe.

Kopernikanische und Ptolemäische Koordinaten.

Einstein hat bekanntlich die Forderung aufgestellt, allen Naturgesetzen eine solche Form zu geben, daß sie von beliebigen Transformationen der zur Festlegung eines Weltpunktes dienenden Koordinaten, also von x, y, z, t unabhängig erscheinen. Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen lassen erkennen, wie weit dieser Forderung — auf dem Gebiete der Mechanik — bereits durch Lagranges allgemeinen Gleichungen entsprochen ist. Der Ansatz von Lagrange greift nach der einen Seite über das Einsteinsche Postulat hinaus, indem er statt des einzelnen Massenpunktes Punktsysteme betrachtet, er bleibt andererseits in den üblichen Darstellungen dahinter zurück, indem in den Gleichungen (12) die Zeit t gewöhnlich nicht mittransformiert wird. Die Zeit t in die allgemeinen Transformationen mit einzubeziehen, ist in der Tat ein neuer physikalischer Gedanke, der durch die Lorentzgruppe der modernen Elektrodynamik herangebracht wurde. Es ist Einsteins eigenstes Verdienst, diesen Gedanken in seiner prinzipiellen Tragweite erfaßt zu haben. Im übrigen aber wolle man die Leistungen von Lagrange nicht übersehen.

Suchen wir noch klar herauszuarbeiten, wie eigentlich die Invarianz der Lagrangeschen Gleichungen gegenüber der durch (12) definierten G_∞ sich zu der Invarianz gegenüber der Galilei-Newton-Gruppe verhält, die wir im vorigen Kapitel insbesondere für das Vielkörperproblem der Astronomen erläuterten. Wir haben die Differentialgleichungen des Vielkörperproblems damals in den gewöhnlichen recht-

[1]) Vgl. z. B. Math. Enzyklopädie IV, 11, S. 447.

winkligen Parallelkoordinaten der Himmelsmechanik — sagen wir, in „Kopernikanischen" Koordinaten — aufgestellt:

$$(17) \qquad m_i \ddot{x} = -k^2 \sum_k m_i m_k \frac{x_k - x_i}{r_{ik}^3} \quad \text{usw.}$$

Diese Gleichungen als solche bleiben bei der zehngliedrigen Gruppe linearer Substitutionen der x, y, z, t, die wir nach Galilei-Newton nannten, aber nicht etwa bei der G_∞ der Gleichungen (12) ungeändert. Um den Vergleich der beiden Gruppen zu erleichtern, wollen wir in der G_{10} der Galilei-Newton-Gruppe, wie sie auf S. 54 definiert ist, die Substitution $t = \pm t' + \xi_4$ durch die identische Substitution ersetzen. Es liegt dann nur mehr eine G_9 vor, welche direkt eine Untergruppe der durch (12) gegebenen G_∞ ist.

Wir denken uns jetzt, sofern r Himmelskörper zu betrachten sind, die $3\,r$ Koordinaten x_i, y_i, z_i irgendwie als Funktionen von t und von $n = 3\,r$ Parametern $q_1 \ldots q_n$. Die Aufstellung der für diese q_α geltenden Lagrangeschen Gleichungen (6) ist besonders einfach, weil sich die in (14) auftretenden Kraftkomponenten in bekannter Weise als die partiellen Differentialquotienten $-\frac{\partial U}{\partial x_i}, -\frac{\partial U}{\partial y_i}, -\frac{\partial U}{\partial z_i}$ der potentiellen Energie

$$(18) \qquad U = -k^2 \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

darstellen lassen; wir haben also nur dieses U als eine Funktion der der $q_1 \ldots q_n$ umzurechnen und

$$(19) \qquad P_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

zu nehmen.

Und nun tritt uns vom invariantentheoretischen Standpunkt aus die Frage entgegen: wie ist es zu verstehen, daß die neuen Gleichungen nicht nur bei der G_9, von der wir gerade sprachen, sondern bei der G_∞ (12) ungeändert bleiben? Offenbar nur so, daß wir uns neben den $q_1 \ldots q_n$ auch T und U bzw. deren Differentialquotienten (soweit sie vorkommen) den Gleichungen (12) entsprechend transformiert denken müssen. Wir haben es bei der in Rede stehenden Invarianz unserer Lagrangeschen Gleichungen gar nicht schlechtweg mit der G_∞ der Gleichungen (12) zu tun, sondern mit der „erweiterten" Gruppe, die dadurch entsteht, daß wir die Ausdrücke der T und U als Funktionen der transformierten q'_α hinzufügen. Je nachdem wir diese Transformation wählen, ändern die T und U ihre Gestalt, und die in $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ geschriebenen Differentialgleichungen ebenfalls. Sie erscheinen nur dadurch in der einheitlichen Form der Lagrangeschen Gleichungen, weil wir in sie neben den q_α die Symbole T und U eingeführt haben.

Dabei behält neben der G_∞ die G_9 natürlich ihr Recht. Seien die

Substitutionen derselben, in den ursprünglichen Koordinaten geschrieben, allgemein durch

$$x_i, y_i, z_i = S(t; x_i', y_i', z_i')$$

bezeichnet. Seien ferner die Formeln, durch die wir das einzelne System der q einführen:

$$x_i, y_i, z_i = V(t; q_1 \ldots q_n);$$

die nach den $q_1 \ldots q_n$ genommenen Auflösungen dieser Gleichungen seien durch

$$q_1 \ldots q_n = V^{-1}(t; x_1, y_1, z_1, \ldots, x_r, y_r, z_r)$$

bezeichnet. Die Lagrangeschen Gleichungen des Vielkörperproblems, die wir für dieses einzelne System der $q_1 \ldots q_n$ aufstellen, werden dann in q_α geschrieben immer gerade bei derjenigen G_9 ungeändert bleiben, die wir in leicht verständlicher Symbolik so schreiben:

$$q_1 \ldots q_n = V^{-1} S V(t; q_1' \ldots q_n'). \tag{20}$$

Die Invarianz im erweiterten Gebiet der G_∞ aber tritt, wie schon gesagt, erst nach „Adjunktion" der Funktionszeichen T und U ein[1]).

An diese Erörterungen knüpfen sich wichtige historische Erinnerungen.

Das nächstliegende Koordinatensystem, dessen sich der beobachtende Astronom naturgemäß bedient, ist das „Ptolemäische", nämlich Höhe und Azimut des Gestirns, wie sie sich dem Beobachter darstellen, und die Entfernung des Gestirns vom Standpunkt des Beobachters. Um in den so definierten Koordinaten die Bewegungsgleichungen für die verschiedenen Körper des Sonnensystems anzuschreiben, haben wir nur auf das allgemeine Schema unserer Lagrangeschen Gleichungen zurückzugreifen. Das Resultat ist natürlich viel komplizierter als unser obiger Ansatz in Kopernikanischen Koordinaten, und wir mögen daran ermessen, welcher ungeheure Fortschritt durch Kopernikus erreicht worden ist. Er selbst empfand

[1]) Das ganze Sachverhältnis, um welches es sich hier handelt, kennen wir von einem einfachen Beispiel her, das in Kap. 1, S. 22 ff. ausführlich besprochen wurde. Es handelte sich damals um die Beziehung zwischen den Invarianten der orthogonalen und der allgemeinen linearen Gruppe. Eine orthogonale Invariante (die als solche nur bei denjenigen linearen Substitutionen ungeändert bleibt, welche $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ in sich selbst überführen) konnte sofort als eine Invariante der allgemeinen linearen Gruppe angesehen werden, wenn wir den vorgelegten Variabeln-systemen (Komplexen) noch die quadratische Form hinzufügten, welche aus $f = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ bei der jeweiligen allgemeinen linearen Transformation hervorgeht. Für die geometrische Auffassung führte das zur allgemeinen affinen oder auch (wenn man die Verhältnisse $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ als Punktkoordinaten in R_{n-1} interpretierte) zu Cayleys allgemeiner „projektiver" Maßbestimmung. — Die Dinge werden immer entsprechend liegen, wenn man von der Invariantentheorie irgendwelcher Substitutionsgruppe zur Invariantentheorie einer umfassenden [illegible] ergeht.

wohl nur die große Vereinfachung des räumlichen Bildes, in welches man die Bewegungen der Sterne nunmehr rein qualitativ einordnen konnte. Die Arbeiten von Galilei und Newton haben dann gezeigt, daß man so auch das Quantitative der Erscheinungen, die wirkenden Kräfte, d. h. eben die Bewegungsgleichungen in einfachster Weise formulieren konnte. Die ganze Lehre von den planetaren Störungen ist von hier aus entstanden. Aber die suggestive Kraft des gewonnenen dynamischen Ansatzes ging in der Folge noch weiter, z. B. war es nur von da aus möglich, die Erscheinungen des Foucoultschen Pendels vorauszusagen. Alles dies wird von uns nur an dem einfachen Schema begriffen, welches die Kopernikanischen Koordinaten vermitteln und immer erst hinterher, für die Zwecke der Beobachtung, in Ptolemäische Koordinaten umgesetzt.

Die Forderungen Einsteins oder die Bedeutung der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen sind also nicht dahin zu verstehen, als wenn es schlechtweg einerlei wäre, welches Koordinatensystem man benutzt. Hätte man die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen vorweg gekannt, so wäre es einer der größten Fortschritte gewesen, wenn jemand hinterher entdeckt hätte, daß es besondere Koordinatensysteme gibt, für welche die Differentialgleichungen des Vielkörperproblems die einfache Form (17) annehmen und für welche sich infolgedessen die immer in der Gestalt (20) vorhandene Galilei-Newton-Gruppe linear darstellt. Vom allgemeinen Standpunkte aus werden die Kopernikanischen Koordinaten durch diese mathematische Tatsache geradezu definiert.

§ 3. Vereinfachte Variationsprinzipe, Übergang zur Geometrie.

Wenn wir uns, wie dies beim Vielkörperproblem der Fall ist, die auf unser mechanisches System wirkenden Kraftkomponenten P_α gemäß den Gleichungen (19) durch die partiellen Differentialquotienten $-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ einer potentiellen Energie U gegeben denken (die außer von den $q_1 \dots q_n$ auch noch von t abhängen kann), so verwandelt sich der Variationsansatz (8) in denjenigen, den man in Deutschland gewöhnlich das *Hamiltonsche Prinzip* nennt[1]):

$$\delta \int (T - U)\, dt = 0 \tag{21}$$

Indem wir jetzt weiter voraussetzen, daß weder in T noch in U das t explizite auftritt, nehmen wir vollends den Ideenkreis auf, der schon in

[1]) Wegen der eigentümlichen historisch-literarischen Verhältnisse siehe Bd. I, Kap. V.

Bd. 1, Kap. V ausführlich dargelegt wurde. Die lebendige Kraft T wird zur homogenen quadratischen Form der $\dot{q}_\alpha$

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta\,, \tag{22}$$

und wir haben als eine Folge der Lagrangeschen Gleichungen das Integral der lebendigen Kraft

$$T + U = h, \tag{23}$$

mit dessen Hilfe wir die Gleichung (21) durch den Jakobischen Variationsansatz ersetzen können:

$$\delta \int \sqrt{(h - U) \cdot T}\, dt = 0\,. \tag{24}$$

Hier tritt das t nur noch formal auf. In der Tat haben wir, indem wir das dt mit unter die Quadratwurzel nehmen

$$\delta \int \sqrt{\frac{1}{2} \sum (h - U)\, a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta} = 0\,, \tag{25}$$

so daß die Bahnkurven unseres Systems im „Raume der q" mit den geodätischen Linien dieses Raumes zusammenfallen, wenn dessen „Bogenelement" ds durch die Formel gegeben ist:

$$ds^2 = \sum \frac{h - U}{2}\, a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta\,. \tag{26}$$

Die Zeit aber, binnen deren irgend ein Stück einer solchen geodätischen Linie durchlaufen wird, ergibt sich nach (23) durch die Quadratur:

$$t = \int \sqrt{\frac{\sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta}{2\,(h - U)}} = \int \frac{ds}{h - U}\,. \tag{27}$$

Den vollen Anschluß an die Riemannsche Geometrie des n-dimensionalen Raumes erhalten wir schließlich, indem wir das U überhaupt konstant voraussetzen (so daß auf unser mechanisches System keinerlei „Kraft" mehr wirkt) und dann der Einfachheit halber noch $h - U = 1$ nehmen. Die Bahnkurven unseres Systems fallen dann einfach mit den geodätischen Linien desjenigen R_n zusammen, dessen Bogenelement

$$ds = \sqrt{\frac{1}{2} \sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta} \tag{28}$$

ist, während die Zeit t gemäß (27) direkt mit der Bogenlänge des durchlaufenen Stücks zusammenfällt.

Wir haben diese allbekannten Dinge hier nur reproduziert, damit von vornherein deutlich ist, wie die geometrischen Untersuchungen von Gauß und Riemann, zu deren Besprechung wir uns nun hinwenden, auf dem Mutterboden der Lagrangeschen Gleichungen erwachsen sind.

Im übrigen können wir die Aufgabe, die uns nun bis auf weiteres beschäftigen soll, so resümieren. Indem das in den Substitutionen (12) vorkommende t nicht mehr explizite auftreten soll, haben wir in den Formeln

$$\begin{array}{c} q_1 = \varphi_1 (q_1' \cdots q_n') \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n = \varphi_n (q_1' \cdots q_n') \end{array} \tag{29}$$

die G_∞ aller Punkttransformationen des von den q erzeugten R_n vor uns. Wir sollen eine quadratische Differentialform $ds^2 = \sum a_{\alpha\beta}\, dq_\alpha\, dq_\beta$ im Sinne der zugehörigen Invariantentheorie behandeln. Dabei kann man der Anschaulichkeit halber ds als das Bogendifferential des R_n deuten.

B. Die Lehre von der inneren Geometrie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten auf der Grundlage von Gauß' Disquisitiones circa superficies curvas.

§ 1. *Zur Orientierung.*

Gauß' große Abhandlung, die wir in vorläufiger Form schon in Bd. 1, Kap. I, besprachen und die für unsere ferneren Entwicklungen den Ausgangspunkt bilden wird, ist nach den verschiedensten Seiten von bahnbrechender Bedeutung gewesen. Erwachsen aus Gauß' geodätischen Arbeiten und getragen von seinen philosophischen Spekulationen über die Natur unseres Raumes hat sie nach theoretisch-mathematischer Seite der gesamten Differentialgeometrie den wichtigsten Impuls gegeben.

Ich darf, was das historische Zustandekommen der Disquisitiones angeht, mich auf die eben nun erscheinende, auf genauestes Quellenstudium zurückgehende Darstellung von Stäckel berufen[1]). Die Entwicklung nach theoretischer Seite ist zunächst die gewesen, daß sich die Gaußischen Gedanken mit denjenigen, die Monge von 1800 an in seiner *Application de l'analyse à la géometrie* gegeben hatte, verbanden, wie u. a. Liouvilles fünfte Ausgabe der „Application" von 1850 beweist, in der neben zahlreichen weiteren Ausführungen von Liouville selbst ein Abdruck von Gauß' Abhandlung Platz gefunden hat[2]). Die Differentialgeometrie als selbständige Disziplin hat dann sehr bald bei allen Kulturnationen eifrige Pflege gefunden. Es genüge hier, auf die einschlägigen Artikel in III, 3 der Math. Enzyklopädie wie insbesondere auf die großen Lehrbücher hinzuweisen, die gegen Ende des 19. Jahrhunderts entstanden sind:

---

[1]) Gauß' Werke, Bd. 10, IV.

[2]) Vgl. S. 107.

1. Das inhaltsreiche, vierbändige Werk von Darboux „*Leçons sur la théorie générale des surfaces*" (Paris 1887—96, 2. Aufl. 1914), dessen Fortsetzung die 1898 in erster, 1910 in zweiter Auflage erschienenen „Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes" desselben Verfassers bilden.

2. Das Lehrbuch von Bianchi „Lezioni di geometria differenziale" (Pisa 1894), in deutscher Übersetzung 1899 in erster, 1910 in zweiter, erweiterter Auflage von Lukat herausgegeben.

3. Die „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen" von Knoblauch (Leipzig 1888), 1913 zu einer umfassenderen Darstellung „Grundlagen der Differentialgeometrie" erweitert[1]).

Aus dem ganzen Interessenkomplex, der mit diesen Angaben umspannt wird, kann hier nur ein bestimmter Ausschnitt zur Geltung gebracht werden. Gauß hat in seiner Abhandlung zwischen der *äußeren* und der *inneren* Geometrie einer Fläche unterschieden, wobei die erstere die Gestalt der Fläche im dreidimensionalen Raum behandelt, die innere Geometrie aber nur diejenigen Fragen herausgreift, welche bei einer beliebigen „isometrischen" Transformation der Fläche ungeändert bleiben. Man denke sich die Koordinaten des Flächenpunktes durch zwei Parameter u, v dargestellt. Die Entfernung zweier unendlich naher Flächenpunkte wird dann nach Gauß durch eine Formel gegeben

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

(wo die rechter Hand stehende quadratische Differentialform positiv definit ist) — und die innere Geometrie der Fläche hat sich mit allen Beziehungen zu beschäftigen, welche sich unter Zugrundelegung dieses ds^2 bei beliebigen Transformationen der Parameter u, v als invariant erweisen. Sie ist also die geometrische Ausgestaltung des am Ende der vorigen Abteilung (S. 147) aufgestellten allgemeinen Problems im niedersten Falle $n = 2$.

Diese geometrische Ausgestaltung erscheint bei unserer Darlegung als das eigentlich Neue. Gauß setzt dabei stillschweigend voraus, daß man es nur mit einer solchen Flächenkalotte zu tun hat, auf der je zwei Punkte nur durch eine einzige geodätische (oder, wie er sagt: kürzeste[2])) Linie verbunden werden können, und verfolgt dann den Gedanken, unter Benutzung dieser geodätischen Linien auf der Fläche genau so eine Geometrie, insbesondere Trigonometrie, zu gründen, wie

---

[1]) Inzwischen erschienen: Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd. 1, Berlin 1921; Bd. 2, Berlin 1923. (H.)

[2]) Die Benutzung des Ausdruckes „geodätische Linie" (bei Zugrundelegung irgend einer die Linie tragenden Fläche) ist nach Stäckel (Leipziger Berichte 1893: Zur Geschichte der geodätischen Linien) erst mit Liouville (1850) allgemein üblich geworden, also merkwürdigerweise seit der Zeit, wo die Beziehung zur wirklichen Geodäsie, die bei Gauß noch so lebendig war, für die theoretischen Geometer völlig zurücktrat.

dies in der Ebene unter Benutzung der geraden Linien geschieht. An die Stelle des Abstandes zweier Punkte schlechthin tritt dann ihr „geodätischer Abstand", d. h. die Länge der sie verbindenden geodätischen Linie.

Wir können diesen Entwicklungen noch eine abstraktere Form geben, indem wir von der Vorstellung einer im dreidimensionalen Raum verlaufenden Fläche ganz absehen und die Variablen u, v kurzweg als Koordinaten in der Ebene interpretieren. Wir betrachten dann (1) als Definition des Bogenelementes einer in der Ebene zu entwerfenden Quasigeometrie (bei der vom dreidimensionalen Raume gar nicht mehr die Rede ist). Die zwei Punkte verbindende geodätische Linie definieren wir durch die Forderung, daß das an ihr entlang erstreckte Bogenintegral $\int ds$ bei festgehaltenen Grenzpunkten einen stationären Wert haben (eine verschwindende erste Variation besitzen) solle. Der Wert des dadurch festgelegten Integrals heißt die geodätische Entfernung der beiden Punkte.

Dieser an sich farblosere Ansatz hat den Vorzug, daß die Aufmerksamkeit von dem, was wir oben die innere Geometrie der Fläche nannten, in keiner Weise abgezogen wird. Wir haben damit die Freiheit, für das ds^2 beliebige, auch indefinite, Differentialformen heranzuziehen. Bei den späteren Verallgemeinerungen Riemanns und den neuen Entwicklungen der Physiker werden wir das brauchen. Die Beziehung zur Mechanik ergibt sich, wenn wir

$$\frac{1}{2}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)$$

als „lebendige Kraft" eines in der Ebene u, v bewegten Punktes von der Masse 1 deuten.

So zeigt sich ein merkwürdiger Parallelismus zwischen Gauß' Gedankenentwicklung und den gleichzeitigen Arbeiten von Hamilton über „*Strahlensysteme*" (Transactions of the R. Irish Academy, vgl. Bd. 1, S. 194). Es war schon lange vor Hamilton bekannt, daß man den Verlauf des Lichtstrahls in irgendwelchem Medium, dessen optische Dichte von Ort zu Ort beliebig wechseln mag, durch das Nullsetzen der ersten Variation eines am Strahl entlang erstreckten Integrals bestimmen kann (Fermats Prinzip). Bezeichnen wir den Integranden dieses Problems mit ds, so ist ds^2 (wenn wir uns auf isotrope Medien beschränken) als irgendwelche definite ternäre quadratische Differentialform der Differentiale der Raumkoordinaten dx, dy, dz zu denken. Soweit illustriert die geometrische Optik das mechanische Prinzip der kleinsten (oder wie Hamilton vorsichtiger sagt: der *stationären*) Wirkung. Aber nun faßte Hamilton den Wert des längs des Lichtstrahls hin erstreckten Integrals als Funktion seiner beiden Grenzpunkte auf. Die Art, wie sich das Integral bei Verschiebung der

Grenzpunkte ändert, nannte er das Prinzip der *variierenden* Wirkung[1]).

Das ist im Grunde derselbe Schritt, den Gauß bei $n = 2$ vollzog, indem er den Begriff der geodätischen Entfernung zweier Punkte in den Mittelpunkt seiner Betrachtung rückte.

§ 2. Von den Differentialgleichungen der geodätischen Linien.

1. Für die zum Bogenelement (1) gehörigen geodätischen Linien haben wir zunächst den Variationsansatz

$$\delta \int \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = 0\,, \tag{2}$$

wo man nach Wahl bald u, bald v als unabhängige Variable betrachten mag. Wie auf S. 145, 146 ausgeführt, ist (2) mit

$$\delta \int (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)\,dt = 0 \tag{3}$$

äquivalent; damit sind die geodätischen Linien als Bahnkurven eines keinen Kräften unterworfenen Punktes eingeführt. Wir haben also zur Bestimmung der geodätischen Linien die beiden Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 2\frac{d(E\dot{u} + F\dot{v})}{dt} &= E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2 \\ 2\frac{d(F\dot{u} + G\dot{v})}{dt} &= E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2\,, \end{aligned} \tag{4}$$

die ausgeführt folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned} 2E\ddot{u} + 2F\ddot{v} + E_u\dot{u}^2 + 2E_v\dot{u}\dot{v} + (2F_v - G_u)\,\dot{v}^2 &= 0 \\ 2F\ddot{u} + 2G\ddot{v} + (2F_u - E_v)\,\dot{u}^2 + 2G_u\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Die Konstanz der lebendigen Kraft ergibt sich, indem wir die linken Seiten bzw. mit $\dot{u}$ und $\dot{v}$ multiplizieren und addieren; man erhält dann in der Tat

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2) = 0\,.$$

Wir dürfen (vgl. oben S. 146) insbesondere

$$E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = 1 \tag{6}$$

setzen. Dann fällt t mit der Bogenlänge der geodätischen Linie zu-

---

[1]) Ich habe das in Bd. 1, Kap. V ausführlich auseinandergesetzt und insbesondere geschildert, wie von diesem Ansatz aus seine späteren Beiträge zur allgemeinen Mechanik entstanden sind.

sammen, und die nach t genommenen Differentialquotienten $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ bekommen eine einfache, rein geometrische Bedeutung.

2. Nachdem alles so vorbereitet ist, wird es bequemer, bei den genannten Differentialquotienten nicht nur zu der Leibnizschen Schreibweise $\frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$ zurückzukehren, sondern mit der im Nenner stehenden Potenz von dt heraufzumultiplizieren und mit den Differentialen

$$du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$$

direkt zu operieren. So ist es im 18. Jahrhundert immer gemacht worden und in der Differentialgeometrie seit Gauß allgemein üblich. Der Strenge der Begriffsbildungen wird damit nichts vergeben, wohl aber eine unnötige Schwerfälligkeit der Bezeichnungen vermieden.

Demgemäß wollen wir in den Gleichungen (5) mit dt^2 heraufmultiplizieren und die entstehenden linken Seiten mit $2\Psi_u$, $2\Psi_v$ bezeichnen:

$$(7)\quad \begin{aligned} 2\Psi_u &= 2E\,d^2u + 2F\,d^2v + E_u\,du^2 + 2E_v\,du\,dv + (2F_v - G_u)\,dv^2 \\ 2\Psi_v &= 2F\,d^2u + 2G\,d^2v + (2F_u - E_v)\,du^2 + 2G_u\,du\,dv + G_v\,dv^2. \end{aligned}$$

Das Verhalten der Gleichungen (5) gegenüber beliebigen Punkttransformationen wird jetzt in Anlehnung an A § 1 (S. 141, 142) folgendermaßen charakterisiert werden können:

a) Versteht man unter δu, δv eine beliebige „Variation" der u, v, so ist

$$(8)\qquad \Psi_u\,\delta u + \Psi_v\,\delta v$$

eine Invariante (also Ψ_u, Ψ_v ein zu δu, δv kontragredienter Vektor).

b) Man erkennt dies am einfachsten, wenn man sich überlegt, daß (8) gemäß Lagranges Zentralgleichung auch so geschrieben werden kann:

$$(9)\quad d\left(E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v\right) - \delta\left(\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{2}\right).$$

c) Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien besagen, daß der Ausdruck (9) für beliebig gewählte δu, δv verschwinden soll (Prinzip der virtuellen Verrückungen).

d) Eben hierin liegt am unmittelbarsten ausgesprochen, daß die geodätischen Linien nach Adjunktion der Differentialform ds^2 eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Bedeutung haben.

§ 3. Die einfachsten Sätze und Begriffe aus Gauß' Disquisitiones in invariantentheoretischer Fassung.

Die Begriffe und Theoreme, die hier kurz zusammengestellt werden sollen, sind aus den Lehrbüchern allgemein bekannt.

1. Invarianten, welche zwei kogrediente Vektoren d und δ (d. h. du, dv und δu, δv) enthalten:

a) die „Polare"

$$P = E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v, \tag{11}$$

mit deren Hilfe sich der Winkel zwischen den beiden Vektoren so darstellt:

$$\varphi = \arc\cos \frac{P}{ds\, \delta s}. \tag{12}$$

b) Entsprechend wird

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(du\, \delta v - dv\, \delta u)}{ds\, \delta s}, \tag{13}$$

so daß der Inhalt des von den beiden Vektoren begrenzten Dreiecks durch die wichtige Formel

$$2\,\Delta = \sqrt{EG - F^2}\,(du\, \delta v - dv\, \delta u) \tag{14}$$

gegeben ist.

2. Invarianten, welche einen kontragredienten Vektor enthalten. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, daß (neben ds^2) irgend eine Funktion $f(u, v)$ gegeben ist, wo dann

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

einen kontragredienten Vektor vorstellt.

a) Die gewöhnliche Theorie der quadratischen Formen ergibt als einfachste Invariante diejenige Größe, welche Beltrami später (im Anschluß an die von Lamé für die mathematische Physik ausgebildete Terminologie) den *ersten Differentialparameter* von f genannt hat:

$$D_1(f) = -\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial f}{\partial u} \\ F & G & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} : (EG - F^2). \tag{15}$$

b) Die partielle Differentialgleichung

$$D_1(f) = 1 \tag{16}$$

definiert die Kurven $f = C$ als *Parallelkurven* unserer Maßbestimmung, in der Weise, daß die Kurven $f = C + dC$ und $f = C$ überall in normaler Richtung um das konstante Stück dC voneinander abstehen.

c) Nimmt man die Kurven $u = C$ selbst als solche äquidistante Kurven, die Kurven $v = C$ aber als ihre rechtwinkligen Trajektorien, so erhält man

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2 \tag{17}$$

(*Gaußsche Koordinaten*).

d) Der Vergleich mit den Differentialgleichungen des § 2 gibt dann, daß die Kurven $v = \text{const}$ *geodätische Linien* sind. Umgekehrt wird durch die rechtwinkligen Trajektorien einer Schar geodätischer Linien eine Schar äquidistanter Kurven $u = \text{const}$ gegeben.

Diese Wechselbeziehung zwischen der partiellen Differentialgleichung (16) und den Scharen der geodätischen Linien fällt unter die allgemeine Lehre vom Zusammenhang der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit ihren Charakteristiken, wie wir diese im 2. Kap. B III, § 4, 5 dieses Bandes und Bd. 1, Kap. V nach verschiedenen Richtungen hin ausgeführt haben.

§ 4. Zur Einführung des Gaußschen Krümmungsmaßes.

1. Ein besonderer Fall des Gaußschen Koordinatensystems sind die von irgend einer Stelle O unseres Gebietes auslaufenden *geodätischen Polarkoordinaten* ($\varphi = \text{const}$ die von O unter dem „Azimut" φ auslaufenden geodätischen Linien, $r = \text{const}$ die um O herumgelegten geodätischen Kreise). Wollen wir für sie die Formel (17) ansetzen, so müssen wir beachten, daß O ein singulärer Punkt des neu eingeführten Koordinatensystems ist, für unser ds^2 aber an sich selbstverständlich keine singuläre Bedeutung haben soll. Die Überlegung zeigt, daß infolgedessen das in (17) vorkommende G hier folgende Form haben muß:

$$G(r, \varphi) = r^2 + r^4\,\mathfrak{P}(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \tag{18}$$

wo $\mathfrak{P}$ irgend eine nach den beigesetzten Argumenten fortschreitende, in der Umgebung des Anfangspunktes konvergente Potenzreihe sein wird; nennen wir ihr konstantes Glied α, so werden wir für kleine Werte von r mit Annäherung haben:

$$ds^2 = dr^2 + (r^2 + \alpha r^4)\,d\varphi^2. \tag{19}$$

2. Der Sinn der Formeln (18), (19) wird noch deutlicher, wenn wir sogenannte *Riemannsche Normalkoordinaten* einführen, indem wir

$$r\cos\varphi = x, \quad r\sin\varphi = y \tag{20}$$

setzen. Wir bekommen dann aus (18):

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) + \mathfrak{P}(x, y)\,(y\,dx - x\,dy)^2 \tag{21}$$

und der Annäherungsformel (19) entsprechend:

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) + \alpha\,(y\,dx - x\,dy)^2 \text{ [1]}. \tag{22}$$

3. Die Riemannschen Normalkoordinaten sind durch ihren An-

[1] Eben in dieser Umrechnung auf Normalkoordinaten liegt begründet, daß $G(r, \varphi)$ die besondere in (18) angegebene Bauart besitzen muß. Wir würden bei der Annahme eines allgemeineren $G(r, \varphi)$ kein in der Umgebung von O gleichzeitig endliches und eindeutiges ds^2 bekommen, wie wir es in (21) vor uns haben. Vgl. W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Aufl., S. 96—97. Berlin 1924.

1. Invarianten, welche zwei kogrediente Vektoren d und δ (d. h. du, dv und δu, δv) enthalten:

a) die „Polare"

$$P = E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v, \tag{11}$$

mit deren Hilfe sich der Winkel zwischen den beiden Vektoren so darstellt:

$$\varphi = \arccos \frac{P}{ds\,\delta s}. \tag{12}$$

b) Entsprechend wird

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}{ds\,\delta s}, \tag{13}$$

so daß der Inhalt des von den beiden Vektoren begrenzten Dreiecks durch die wichtige Formel

$$2\Delta = \sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - dv\,\delta u) \tag{14}$$

gegeben ist.

2. Invarianten, welche einen kontragredienten Vektor enthalten. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, daß (neben ds^2) irgend eine Funktion $f(u, v)$ gegeben ist, wo dann

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

einen kontragredienten Vektor vorstellt.

a) Die gewöhnliche Theorie der quadratischen Formen ergibt als einfachste Invariante diejenige Größe, welche Beltrami später (im Anschluß an die von Lamé für die mathematische Physik ausgebildete Terminologie) den *ersten Differentialparameter* von f genannt hat:

$$D_1(f) = -\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial f}{\partial u} \\ F & G & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} : (EG - F^2). \tag{15}$$

b) Die partielle Differentialgleichung

$$D_1(f) = 1 \tag{16}$$

definiert die Kurven $f = C$ als *Parallelkurven* unserer Maßbestimmung, in der Weise, daß die Kurven $f = C + dC$ und $f = C$ überall in normaler Richtung um das konstante Stück dC voneinander abstehen.

c) Nimmt man die Kurven $u = C$ selbst als solche äquidistante Kurven, die Kurven $v = C$ aber als ihre rechtwinkligen Trajektorien, so erhält man

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2 \tag{17}$$

(*Gaußsche Koordinaten*).

Im Interesse der später für beliebiges n zu treffenden Verallgemeinerung schreiben wir diese Formel noch so:

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 2 \lim_{r \to 0} \left(\frac{\Pi - 2\pi r}{r^2 \cdot 2\pi r}\right) \tag{25'}$$

Wir können statt der Kreispheriperie Π hier auch leicht den Kreisinhalt J einführen (der $\int_0^r \Pi\, dr$ ist). Wir erhalten dann:

$$J = \pi r^2 + \frac{\alpha \pi r^4}{4} \tag{26}$$

also

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 4 \lim_{r \to 0} \left(\frac{J - \pi r^2}{r^2 \cdot \pi r^2}\right). \tag{27}$$

Diese Formeln, welche Umfang und Inhalt eines geodätischen Kreises (von dem verschwindenden Radius r) mit dem Umfang und Inhalt eines mit demselben Radius beschriebenen Euklidischen Kreises in Verbindung setzen, sind um 1860 herum von den französischen Geometern aus den Gaußischen Entwicklungen abgeleitet worden. Schließlich hätten wir die Integration mit gleichem Erfolge statt auf die ganze Peripherie des Kreises auf irgend ein Segment desselben bzw. den zugehörigen Kreissektor beziehen können.

§ 5. Von der analytischen Darstellung des Krümmungsmaßes K bei beliebig gegebenem ds^2.

Nachdem wir die Größe K geometrisch definiert haben, wollen wir sie für ein beliebig gegebenes $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ analytisch darstellen.

Gauß selbst hat dafür, nicht ohne Mühe[1]), auf Grund längerer Rechnung die folgende Formel gefunden (welche neben E, F, G nur deren erste und zweite Differentialquotienten nach u und v enthält):

$$\begin{aligned} 4\,(EG - F^2)^2 K = {} & E\,(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) \\ & + F\,(E_u G_v - E_v G_u - 2\,E_v F_v + 4 F_u F_v - 2 G_u F_u) \\ & + G\,(E_u G_u - 2\,F_v E_u + E_v^2) \\ & - 2\,(EG - F^2)\,(E_{vv} - 2\,F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned} \tag{28}$$

Um das Bildungsgesetz dieses Ausdrucks zu verstehen, wenden wir uns wieder zu Riemann, — in diesem Falle zu der *Preisschrift*, die er 1861 der Pariser Akademie einreichte und die erst 1876 aus seinem Nachlaß in seinen gesammelten Werken veröffentlicht worden ist[2]). Dort finden sich inmitten anderer Entwicklungen knappe Angaben, wie man das Analogon für K bei einem beliebigen von

[1]) Vgl. Stäckel: l. c. S. 147.

[2]) Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia propositae ... (2. Aufl. der Werke, S. 391—404).

fangspunkt natürlich nur bis auf eine orthogonale Substitution (eine Drehung um O bzw. eine Spiegelung an einer durch O gehenden Achse) bestimmt. Aber hierbei bleibt nicht nur $dx^2 + dy^2$, sondern auch $(y\,dx - x\,dy)^2$ ungeändert. Die in (22) auftretende Konstante α hat also einen von Zufälligkeiten unabhängigen Charakter: sie mißt die *Abweichung*, welche unsere Maßbestimmung in der nächsten Umgebung des Punktes O von einer *Euklidischen* Maßbestimmung besitzt.

4. Solcherweise sind wir nun zum Begriff des *Gaußschen Krümmungsmaßes* gekommen. In der Tat ist dieses von unserem α nur um einen Zahlenfaktor verschieden:

$$K = -3\alpha \tag{23}$$

(wo das -3 nur zugesetzt ist, um den Anschluß an die von Gauß der äußeren Geometrie einer Fläche entnommene ursprüngliche Definition von K als Produkt der Hauptkrümmungen zu gewinnen). Das Krümmungsmaß erscheint unmittelbar als eine nur von dem ds^2 selbst abhängende Invariante der einzelnen Stelle O gegenüber beliebigen Transformationen der u, v.

5. Die hier gegebene Einführung des K ist dieselbe, welche Riemann in seinem *Habilitationsvortrage* von 1854[1]) gleich für Räume von n Dimensionen gegeben hat. Wir haben, um den Vergleich vollständig zu machen, nur noch zu bemerken, daß $(y\,dx - x\,dy)^2$ gemäß (14) das Quadrat des doppelten Dreiecksinhaltes ist, der durch die Ecken O, (dx, dy) und den bei Formel (22) dem Punkte O gleichfalls unendlich naheliegenden Punkt (x, y) gebildet wird. Das Charakteristische der Betrachtung gegenüber der gewöhnlichen an Gauß unmittelbar anknüpfenden Darstellungsweisen ist, daß wir gar nicht aus dem zweidimensionalen Gebiet der u, v herausgetreten sind, daß also dieses Gebiet in keiner Weise als eine krumme Fläche eines Raumes von 3 Dimensionen interpretiert zu werden braucht. Die Benennung „Krümmungsmaß" trägt diesem Umstande nicht genügend Rechnung, sondern ist geeignet, Mißverständnisse herbeizuführen. Trotzdem werden wir, da sie allgemein verbreitet ist, an ihr festhalten müssen.

6. Eine geometrische Interpretation des Krümmungsmaßes ergibt sich zwanglos aus (19). Wir erhalten von da aus als Peripherie des mit dem kleinen Radius r um O beschriebenen Kreises:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \left(r + \frac{\alpha}{2} r^3\right) d\varphi = 2\pi r + \alpha\pi r^3, \tag{24}$$

also

$$\alpha = -\frac{K}{3} = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\Pi - 2\pi r}{\pi r^3}\right) \tag{25}$$

---

[1]) „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen". Riemanns Werke, 2. Aufl., S. 272. Selbständig erschienen mit Erläuterungen von Weyl, Berlin 1919.

Im Interesse der später für beliebiges n zu treffenden Verallgemeinerung schreiben wir diese Formel noch so:

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 2 \lim_{r \to 0} \left(\frac{\Pi - 2\pi r}{r^2 \cdot 2\pi r}\right) \tag{25'}$$

Wir können statt der Kreispheriperie Π hier auch leicht den Kreisinhalt J einführen (der $\int_0^r \Pi\, dr$ ist). Wir erhalten dann:

$$J = \pi r^2 + \frac{\alpha \pi r^4}{4} \tag{26}$$

also

$$\alpha = -\frac{K}{3} = 4 \lim_{r \to 0} \left(\frac{J - \pi r^2}{r^2 \cdot \pi r^2}\right). \tag{27}$$

Diese Formeln, welche Umfang und Inhalt eines geodätischen Kreises (von dem verschwindenden Radius r) mit dem Umfang und Inhalt eines mit demselben Radius beschriebenen Euklidischen Kreises in Verbindung setzen, sind um 1860 herum von den französischen Geometern aus den Gaußischen Entwicklungen abgeleitet worden. Schließlich hätten wir die Integration mit gleichem Erfolge statt auf die ganze Peripherie des Kreises auf irgend ein Segment desselben bzw. den zugehörigen Kreissektor beziehen können.

§ 5. Von der analytischen Darstellung des Krümmungsmaßes K bei beliebig gegebenem ds^2.

Nachdem wir die Größe K geometrisch definiert haben, wollen wir sie für ein beliebig gegebenes $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ analytisch darstellen.

Gauß selbst hat dafür, nicht ohne Mühe[1]), auf Grund längerer Rechnung die folgende Formel gefunden (welche neben E, F, G nur deren erste und zweite Differentialquotienten nach u und v enthält):

$$\begin{aligned}
4\,(EG - F^2)^2 K = {} & E\,(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) \\
& + F\,(E_u G_v - E_v G_u - 2\,E_v F_v + 4F_u F_v - 2G_u F_u) \\
& + G\,(E_u G_u - 2\,F_v E_u + E_v^2) \\
& - 2\,(EG - F^2)\,(E_{vv} - 2\,F_{uv} + G_{uu}).
\end{aligned} \tag{28}$$

Um das Bildungsgesetz dieses Ausdrucks zu verstehen, wenden wir uns wieder zu Riemann, — in diesem Falle zu der *Preisschrift*, die er 1861 der Pariser Akademie einreichte und die erst 1876 aus seinem Nachlaß in seinen gesammelten Werken veröffentlicht worden ist[2]). Dort finden sich inmitten anderer Entwicklungen knappe Angaben, wie man das Analogon für K bei einem beliebigen von

[1]) Vgl. Stäckel: l. c. S. 147.

[2]) Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia propositae ... (2. Aufl. der Werke, S. 391—404).

n Variablen abhängenden ds^2 zu bilden habe[1]). Indem wir uns vorerst auf $n = 2$ beschränken, reproduzieren wir diese Angaben in etwas breiterer Darstellung.

1. Vorbereitendes. Um den Wert von K in O zu finden, hatten wir vorhin das ganze Büschel der von O auslaufenden geodätischen Linien herangezogen. Eigentlich benutzt wurde aber nur ihr Verlauf in der nächsten Nähe von O. Dieser Verlauf wird durch die Differentialgleichungen (5) bzw. die Ausdrücke (7) des § 2 beschrieben und an diese werden wir nunmehr anknüpfen. Wir ziehen von O aus zwei Vektoren, die wir abkürzend mit d und δ bezeichnen: ein beliebiger von O auslaufender Vektor ist dann durch $\varkappa d + \lambda \delta$ gegeben. Außer den Zeichen d^2 und δ^2 werden wir noch das Zeichen $d\delta = \delta d$ zu benützen haben; das zweite Differential, welches sich an den Vektor $\varkappa d + \lambda \delta$ anreiht, ist dann mit $(\varkappa d + \lambda \delta)^2 = \varkappa^2 d^2 + 2\varkappa\lambda d\delta + \lambda^2 \delta^2$ zu bezeichnen. Man hat auch diese Ausdrücke — und alle ähnlichen, die wir in der Folge benutzen, — immer als Zähler geeigneter Differentialquotienten aufzufassen. Hierbei stört nur die heutzutage übliche Bezeichnung der bei Funktionen mehrerer Variablen in Betracht zu ziehenden Differentialquotienten. Hat man z. B. eine Funktion von zwei Variablen t und τ, so sollte man die Inkremente von t und τ mit dt und $\delta\tau$ bezeichnen und dementsprechend die ersten und zweiten Differentialquotienten so schreiben:

$$\frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta\tau} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2}{dt^2}, \quad \frac{d\,\delta}{dt\,\delta\tau}, \quad \frac{\delta^2}{\delta\tau^2}.$$

(Eine ähnliche Bemerkung betreffend die unter einem mehrfachen Integral auftretenden Differentiationssymbole machten wir schon im Kap. II.)

Mit diesen Schreibweisen gehen wir nun in die Differentialgleichungen (5): $\Psi_u = 0$, $\Psi_v = 0$ ein. Wir ersetzen also die dort auftretenden du, dv, d^2u, d^2v durch

$$(\varkappa d + \lambda\delta)\,u, \quad (\varkappa d + \lambda\delta)\,v, \quad (\varkappa d + \lambda\delta)^2 u, \quad (\varkappa d + \lambda\delta)^2 v.$$

Wir ordnen nach $\varkappa^2$, $\varkappa\lambda$ und λ^2 und setzen die Koeffizienten dieser Terme einzeln $= 0$. Wir erhalten so 6 Gleichungen, die wir in sofort verständlicher Weise durch folgende Abkürzungen benennen:

$$(29)\quad \begin{aligned}
0 &= \Psi_u(d,d) = E\,d^2u + F\,d^2v + \frac{E_u\,du^2 + 2E_v\,du\,dv + (2F_v - G_u)\,dv^2}{2},\\
0 &= \Psi_v(d,d) = F\,d^2u + G\,d^2v + \frac{(2F_u - E_v)\,du^2 + 2G_u\,du\,dv + G\,dv^2}{2},\\
0 &= \Psi_u(d,\delta) = E\,d\delta u + F\,d\delta v + \frac{E_u\,du\,\delta u + E_v(du\,\delta v + \delta u\,dv) + (2F_v - G_u)\,dv\,\delta v}{2}\\
0 &= \Psi_v(d,\delta) = F\,d\delta u + \ldots,\\
0 &= \Psi_u(\delta,\delta) = E\,\delta^2 u + F\,\delta^2 v + \frac{E_u\,\delta u^2 + 2E_v\,\delta u\,\delta v + (F_v - G_u)\,\delta v^2}{2},\\
0 &= \Psi_v(\delta,\delta) = F\,\delta^2 u + \ldots.
\end{aligned}$$

[1]) Werke, 2. Aufl., S. 402, 403.

Diese 6 Gleichungen zusammen stellen das dar, was wir die vom Punkte O auslaufende „Umgebung" geodätischer Bahnen nennen können. Sie gestatten, die 6 zweiten Differentiale $d^2u, d\delta u, \delta^2 u, d^2 v, \ldots$ durch die 4 ersten, nämlich $du, \delta u, dv, \delta v$ auszudrücken.

Fassen wir je 2 zusammengehörige der Gleichungen (29) nach dem Muster von (8) zusammen, indem wir noch einen dritten, willkürlich bleibenden Vektor δ' einführen. Statt $\Psi_u = 0$, $\Psi_v = 0$ verlangen wir, daß $\Psi_u \delta' u + \Psi_v \delta' v$ (welches gegenüber beliebiger Koordinatentransformation eine Invariante ist) für alle Werte der $\delta' u$, $\delta' v$ verschwindet. Bedienen wir uns dann noch, wie in (9), der von Lagrange angegebenen Umsetzung, so haben wir statt der Gleichungen (29) die drei Formeln:

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
0 &= 2d(E\,du\,\delta u' + F(du\,\delta' v + \delta' u\,dv) + G\,dv\,\delta' v) - \delta'(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)\,,\\
0 &= d(E\,\delta u\,\delta' u + F(\delta u\,\delta' v + \delta' u\,\delta v) + G\,\delta v\,\delta' v) - \delta'(E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv)\\
&\quad + \delta(E\,du\,\delta' u + F(du\,\delta' v + \delta' u\,dv) + G\,dv\,\delta' v) \qquad\qquad + G_v\,dv\,\delta v)\,,\\
0 &= 2\delta(E\,\delta u\,\delta' u + 2F(\delta u\,\delta' v + \delta' u\,\delta v) + G\,\delta v\,\delta' v) - \delta'(E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2)\,.
\end{aligned}
$$

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir die Variablen und die Koeffizienten E, F, G durch Indizes unterscheiden, also etwa

$$
(31)\qquad ds^2 = \sum_1^2 a_{ik}\,dx_i\,dx_k
$$

setzen. Wir haben dann statt (30):

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
0 &= 2d\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta' x_k - \delta'\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k\,,\\
0 &= d\sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta' x_k + \delta\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta' x_k - \delta'\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k\,,\\
0 &= 2\delta\sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta' x_k - \delta'\sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k\,.
\end{aligned}
$$

In dieser Form finden sich die Gleichungen bei Riemann l. c. (nur daß die Summen bei ihm immer von 1 bis n laufen, worauf wir erst später eingehen können).

2. Der entscheidende Ansatz.

Riemann bildet nunmehr einen Ausdruck in den Differentialen d, δ, der gewiß invariant ist und den wir Ω nennen wollen.

$$
(33)\qquad \Omega = \delta\delta\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k - 2d\delta\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k + dd\sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k\,.
$$

Hier ist jedes Glied rein formal zu berechnen, indem man nur von der Vertauschbarkeit der Operationen d und δ Gebrauch macht. Es ist also beispielsweise:

$$
\delta\delta\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k = \delta\left(\sum\delta a_{ik}\,dx_i\,dx_k + \sum a_{ik}(\delta\,dx_i\,dx_k + dx_i\,\delta\,dx_k)\right),
$$

wo δa_{ik} seinerseits $= \sum_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\delta x_r$ gesetzt werden wird.

Man erkennt, daß der Ausdruck so gebildet ist, daß bei der Ausrechnung alle Terme mit dritten Differentialen, z. B. $a_{ik}\,d\delta\delta x_i \ldots dx_k$

von selbst wegfallen. Es bleiben also nur Terme mit den ersten und zweiten Differentialen

$$d x_i, \ \delta x_i, \ d^2 x_i, \ d\delta x_i, \ \delta^2 x_i$$

stehen.

Wir tragen jetzt in (33) für die zweiten Differentiale diejenigen Werte ein, welche sich aus den Gleichungen (29) bzw. (30) oder (32) ergeben. Dann verwandelt sich Ω, wie man überschlägt, in einen neuen Ausdruck, der in den *ersten* Differentialen $d x_i$ wie in den δx_i homogen zweiten Grades ist und den wir $[\Omega]$ nennen wollen. Man erkennt auch, daß dieses $[\Omega]$, wegen der Gestalt des Ω selbst und der Gestalt der Gleichungen (29) bis (32) so gebildet ist, daß es sich nur um einen konstanten Faktor, nämlich um $(\varkappa\nu - \lambda\mu)^2$ ändert, wenn man d und δ bzw. durch $\varkappa d + \lambda\delta$, $\mu d + \nu\delta$ ersetzt. Ω bzw. $[\Omega]$ sind also *Kombinanten* von d und δ (siehe S. 11). Wir schließen, daß $[\Omega]$ sich in folgende Form setzen läßt:

$$(34) \qquad [\Omega] = [\text{———}]\,(d x_1\, \delta x_2 - \delta x_1\, d x_2)^2,$$

wo die Klammergröße [———] rechter Hand eine gewisse Verbindung allein der a_{ik} und ihrer nach den x genommenen ersten und zweiten Differentialquotienten ist.

3. Mit der Aufstellung dieser Invariante $[\Omega]$ haben wir nun gewonnenes Spiel.

Wir kennen nämlich eine zweite Invariante (Kombinante) mit dem Faktor $(d x_1\, \delta x_2 - \delta x_1\, d x_2)^2$, das ist das Quadrat des von den Vektoren d, δ umgrenzten Dreiecksinhaltes. In der Tat haben wir nach Formel (14), § 3 in jetziger Schreibweise

$$(35) \qquad 4\,\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (d x_1\, \delta x_2 - \delta x_1\, d x_2)^2.\text{[1]}$$

Der Quotient von (34) und (35) wird also eine von den d, δ unabhängige Invariante sein. Und nun ist Riemanns Behauptung, daß dieser Quotient von dem Gaußischen Krümmungsmaß nur um einen Zahlenfaktor verschieden ist, genauer daß

$$(36) \qquad K = -\frac{[\Omega]}{8\,\Delta^2}$$

ist, — womit das Bildungsgesetz von K vollkommen klar liegt.

§ 6. Beweis der Riemannschen Formel und verschiedene Ausführungen dazu.

Den Beweis der Formel (36) brauchen wir nicht für ein beliebig gegebenes ds^2 zu führen; denn die rechte Seite von (36) ist jedenfalls

[1] Das können wir übrigens, um mit Riemanns eigener Angabe in Übereinstimmung zu bleiben, auch so schreiben:

$$(35') \qquad 4\Delta^2 = \Sigma a_{ik}\, d x_i\, d x_k \cdot \Sigma a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k - (\Sigma a_{ik}\, d x_i\, \delta x_k)^2.$$

eine Invariante, es genügt also, im Falle der Benutzung Riemannscher Normalkoordinaten ihre Übereinstimmung mit der in § 4 gegebenen, auf Benutzung eben dieser Koordinaten gegründeten Definition des K zu zeigen*.

Dieser Nachweis gelingt aber fast ohne Rechnung:

a) Wir können, da die höheren Glieder in x, y für die Kalotte der vom Koordinatenanfangspunkt auslaufenden geodätischen Bahnen doch nicht in Betracht kommen, gleich mit der angenäherten Form (22) § 4 des Bogenelementes arbeiten, die sich in jetziger Bezeichnung so schreibt:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \alpha\,(x_2^2\,dx_1^2 + x_1^2\,dx_2^2 - 2\,x_1\,x_2\,dx_1\,dx_2)\,. \tag{37}$$

b) Wir finden dann aus den Gleichungen (29), daß die zweiten Differentiale:

$$d^2x_1,\ d^2x_2,\ d\delta x_1,\ d\delta x_2,\ \delta^2 x_1,\ \delta^2 x_2$$

in unserem Falle sämtlich $= 0$ zu setzen sind.

c) Infolgedessen berechnet sich $[\Omega]$ so, daß wir in dem Ausdrucke

$$\Omega = \delta\,\delta \sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k - 2\,d\,\delta \sum a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k + d\,d \sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k$$

die Variationen alle nur auf die a_{ik} werfen. Der Bestandteil $dx_1^2 + dx_2^2$ von (37) liefert dabei, weil er konstante Koeffizienten hat, keinen Beitrag. Bleibt, daß wir

$$\begin{aligned}\alpha\,\{\delta\,\delta\,(x_2^2\,dx_1^2 &- 2\,x_1\,x_2\,dx_1\,dx_2 &&+ x_1^2\,dx_2^2)\\ - 2\,d\,\delta\,(x_2^2\,dx_1\,\delta x_1 &- x_1\,x_2\,dx_1\,\delta x_2 - x_1\,x_2\,\delta x_1\,dx_2 &&+ x_1^2\,dx_2\,\delta x_1)\\ + d\,d\,(x_2^2\,\delta x_1^2 &- 2\,x_1\,x_2\,\delta x_1\,dx_2 &&+ x_1^2\,\delta x_2^2)\}\end{aligned}$$

in der angegebenen Weise berechnen. Und hier gibt nun jede der drei Horizontalen den gleichen Beitrag:

$$2\,\alpha\,(\delta x_2\,dx_1 - \delta x_1\,dx_2)^2,$$

so daß wir im ganzen

$$[\Omega] = 6\alpha\,(\delta x_2\,dx_1 - \delta x_1\,dx_2)^2 \tag{38}$$

erhalten.

d) Andererseits wird nach Formel (14), § 3:

$$4\,\Delta^2 = (\delta x_2\,dx_1 - \delta x_1\,dx_2)^2, \tag{39}$$

so daß wir aus (36)

$$K = -3\,\alpha$$

erhalten, was mit der in Formel (23), § 4 gegebenen ursprünglichen Definition des K übereinstimmt.

Wir knüpfen an diesen Nachweis noch eine andere Deutung von K.

1. Wir betrachteten schon S. 152 sogenannte Gaußische Koordinaten, für welche $ds^2 = du^2 + G dv^2$ wird, wo die $u = \text{const}$ Parallelkurven, die $v = \text{const}$ aber ihre (geodätischen) orthogonalen Trajektorien sind. Wir wollen unsere Betrachtung auf die nächste Umgebung

von $u = 0$ beschränken und dementsprechend eine Reihenentwicklung des G nach Potenzen von u ansetzen, die wir mit den Gliedern zweiter Ordnung abbrechen:

$$ds^2 = du^2 + (\varphi(v) + u\psi(v) + u^2\chi(v))dv^2. \tag{41}$$

Indem wir das v noch geschickt wählen, erreichen wir, daß hier $\varphi(v) = 1$ gesetzt werden kann. Man nehme nun an, daß speziell $u = 0$ selbst eine geodätische Kurve sei. Entlang $u = 0$ müssen dann die Gleichungen

$$\Psi_u\,(d, d) = 0, \qquad \Psi_v\,(d, d) = 0$$

(S. 156) erfüllt sein. Aber entlang $u = 0$ ist eo ipso $du = d^2 u = 0$, dv ist gleich der Bogenlänge ds zu setzen und also $d^2 v = 0$ zu nehmen. Wir folgern, daß G_v längs $u = 0$ verschwindet. Hiernach muß $\psi\,(v) = 0$ sein und wir haben:

$$ds^2 = du^2 + (1 + u^2\chi\,(v))\,dv^2. \tag{42}$$

2. Nun wollen wir der Berechnung von $[\Omega]$ Figur 6 zugrundelegen (wo der Vektor δ für die Punkte von $u = 0$ je durch das Stück der durch den Punkt hindurchgehenden Kurve $v = \text{const}$ zwischen $u = 0$ und $u = \delta u$ definiert sein soll, unter δu irgend einen von v unabhängigen Wert verstanden).

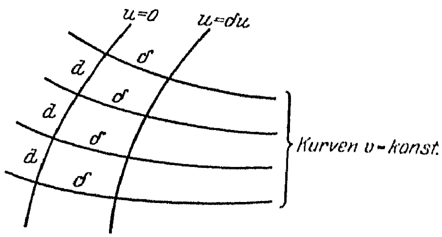

Fig. 6.

Wir hatten bereits (für das Fortschreiten längs $u = 0$) $d^2u = 0$, $d^2v = 0$; jetzt tritt $d\delta u = 0$ und (wegen $\delta v = 0$) $d\delta v = 0$ und $\delta^2 v = 0$ noch hinzu. Aber die Linie $v = \text{const}$ ist selbst eine geodätische Linie, und das an ihr hin erstreckte δs fällt mit δu zusammen. Daher ist auch $\delta^2 u = 0$ zu setzen. $[\Omega]$ ist also wieder so zu berechnen, daß wir nur die von den ersten Differentialen abhängigen Terme beibehalten.

3. Die direkte Ausrechnung des $[\Omega]$ ergibt jetzt einfach $\chi\,(v) = -K$, so daß (immer entlang $u = 0$):

$$ds^2 = du^2 + (1 - u^2 \cdot K)\,dv^2 \tag{43}$$

wird. Wir schließen beiläufig: ziehen wir zwischen irgend zwei Punkten von $u = 0$ eine Nachbarkurve, so wird das auf sie bezügliche Integral

$$\int \frac{ds^2}{dt^2}\,dt$$

das entlang $u = 0$ genommene Integral um

$$\int \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - Ku^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] dt \tag{44}$$

übertreffen. Hierauf folgen bekannte Sätze über die zweite Variation der Bogenlänge der geodätischen Linie $u = 0$, insbesondere, daß diese Variation bei negativem K stets positiv ist (Jacobi)[1]).

4. Vor allen Dingen aber ergibt sich eine einfache geometrische Interpretation des K, die von den früher gegebenen verschieden ist. Wir wollen, um die Bezeichnungen besser anschreiben zu können, das einzelne Viereck von Fig. 6 in vergrößertem Maßstabe zeichnen (Fig. 7). Formel (43) gibt uns dann $\frac{1}{2}\,\delta\delta\, ds^2 = -K\,\delta u^2\, ds^2$, also

$$K = -\frac{1}{2}\,\frac{\delta\delta\, ds^2}{\delta u^2\, ds^2}. \tag{45}$$

Die Formel ist unabhängig von dem Azimut, unter welchem die geodätische Linie $u = 0$ durch den Punkt, dessen K wir bestimmen wollen, verläuft. — Die hierin liegende Deutung des K (die ich Carathéodory verdanke) ist so schön, daß ich sie hier nicht übergehen wollte, trotzdem ich sie im folgenden nicht benutzen werde. Der Gegensatz gegen die frühere Deutung von K wird wohl am klarsten, wenn wir an das durch die Meridiane und Breitenkreise der Erdkugel repräsentierte Koordinatensystem denken. Beidemal betrachten wir die Längenänderung eines zwischen zwei Meridianen eingeschlossenen Stücks eines Breitenkreises: das erstemal in der Nähe des Pols, das zweitemal in der Nähe des Äquators.

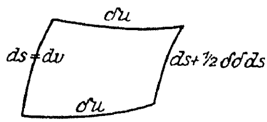

Fig. 7.

§ 7. Von der Äquivalenz zweier binärer ds^2. Genaueres über den Fall konstanten Krümmungsmaßes.

a) Mit jeder Gruppe von Transformationen ist selbstverständlich ein Äquivalenzproblem verbunden: Wann kann ich zwei vorgegebene Gebilde durch Transformationen der Gruppe ineinander überführen? Ebenso selbstverständlich ist der Zusammenhang des Problems mit der Invariantentheorie der Gruppe: alle Invarianten des einen Gebildes müssen denen des anderen gleich sein.

Daher ist es ein alter Gedanke, den Begriff der Invariante geradezu aus dem Äquivalenzbegriff zu deduzieren. So hat es z. B. für die allgemeine lineare Invariantentheorie Aronhold in seiner „*Fundamentalen Begründung der Invariantentheorie*" in Crelle 62 (1863) versucht. Doch zeigen sich hierbei Komplikationen, sofern man nicht im allgemeinen bleiben, sondern alle besonderen Fälle mitbeherrschen will.

Als Beispiel diene das, was in Kap. I (S. 25) über die Äquivalenz zweier Bilinearformen $\sum \alpha_{ik} u_i x_k$, $\sum \beta_{ik} u_i x_k$ (Bilinearformen

[1]) Werke IV, S. 39—55.

mit kontragredienten Veränderlichen) gesagt wurde. Sei δ_{ik} in bekannter Weise $= 1$ für $i = k$ und $= 0$ für $i \lessgtr k$. Dann genügt es im allgemeinen, wenn die beiden Determinanten $|\alpha_{ik} + \lambda \delta_{ik}|$ und $|\beta_{ik} + \lambda \delta_{ik}|$ als Polynome in λ aufgefaßt, übereinstimmen. Ausnahmen aber treten ein, wenn die genannten Polynome als Funktionen von λ aufgefaßt mehrfache Linearfaktoren darbieten. Man wird dann zu der interessanten, aber weitschichtigen Theorie der „Elementarteiler" geführt. Es heißt dies, invariantentheoretisch aufgefaßt: man muß neben den Determinanten $|\alpha_{ik} + \lambda \delta_{ik}|$ noch diejenigen Invarianten heranziehen, die aus diesen Determinanten entstehen, wenn man sie mit 1, 2... Reihen von unbestimmten Größen, welche sich je nachdem mit den x kogredient oder kontragredient substituieren, rändert.

Ähnlich in allen anderen Fällen. Man wird gewöhnlich besser fahren, wenn man nicht mit dem Äquivalenzproblem beginnt, sondern zuerst Bildungsgesetze für Invarianten aufstellt, um dann hinterher zu prüfen, ob man mit der Aufstellung der Invarianten hinreichend weit gegangen ist, um das Äquivalenzproblem in jedem Falle zu erledigen.

b) So ist es auch mit der Frage der Äquivalenz zweier (binärer) Differentialformen ds^2 und ds'^2 gegenüber unserer G_∞. Soll ds^2 durch eine Substitution $x_i = \varphi_i(x_1', x_2')$ in ds'^2 übergehen, so muß das Krümmungsmaß $K(x_1, x_2)$ gleich sein dem Krümmungsmaß $K'(x_1', x_2')$. Gleiches wird beispielsweise für die ersten Differentialparameter D_1K und $D_1'K'$ gelten. Hierdurch ist die Substitution, um die es sich handeln kann, bereits im allgemeinen bestimmt. Aber es gibt Fälle, wo man damit nicht auskommt (wenn D_1K eine Funktion von K selbst ist). Dann muß man weitere Kriterien heranziehen, die man in moderner Fassung (im Anschluß an Darboux' Lehrbuch) z. B. in Voß' Enzyklopädieartikel über die Isometrie der Flächen (= III D, 6a) in Nr. 19 findet.

Diese ganze Frage ist bald nach dem Erscheinen der Gaußschen Disquisitiones zuerst von Minding untersucht worden (Crelle 6, 1830). Minding hat insbesondere gezeigt, daß, wenn K konstant (d. h. von x_1, x_2 unabhängig) ist, die Gleichheit der beiderseitigen K die hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der beiden ds^2 ist. Hiermit hängt zusammen, daß ds^2 dann in verschiedene Normalformen gesetzt werden kann, welche nur von K abhängen. Zugleich ergibt sich, daß jede solche Normalform und also das einzelne ds^2, durch eine kontinuierliche Gruppe von dreifach unendlich vielen Transformationen in sich selbst verwandelt werden kann. Von hier aus die Bedeutung, welche die Lehre von den ds^2 konstanter Krümmung in den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie hat. Man kommt für $K = 0$ auf die Formeln der gewöhnlichen (Euklidischen) Planimetrie, für positives K auf die der sphärischen, für negatives K auf die der pseudosphärischen Geometrie.

c) Zu den Mannigfaltigkeiten „konstanter Krümmung" (und zwar nicht nur zu den zweidimensionalen) sind wir in früheren Teilen dieser Darstellung schon von anderer Seite geführt worden, nämlich von Cayleys projektiver Maßbestimmung aus (vgl. Bd. 1, S. **149—154**, oder auch die kurze Bemerkung in Bd. 2, S. 22). In Anknüpfung an die hier im Vordergrunde der Betrachtung stehenden projektiven Beziehungen haben Clifford und ich schon vor Jahren auf einen wesentlichen Umstand aufmerksam gemacht, auf den z. B. Enriques in seinem Enzyklopädieartikel über die Prinzipien der Geometrie (= III A, B I) ausführlich eingeht. Unsere Untersuchungen über die Gestalt des ds^2 betreffen nämlich zunächst nur einen *einfach zusammenhängenden Bereich* der Mannigfaltigkeit, die wir untersuchen, wo die Koordinatenwerte u, v den Punkten der Mannigfaltigkeit eindeutig zugeordnet sind. Erfaßt man dem entgegen den *Gesamtverlauf* der Mannigfaltigkeiten, so können sich diese, bei demselben Werte des K, ohne in ihrem Innern irgendwie singuläre Punkte zu besitzen, sehr wohl durch die *Zusammenhangverhältnisse* unterscheiden, welche sie darbieten. Um das von Clifford entdeckte charakteristische Beispiel zu nennen: Mannigfaltigkeiten konstanter verschwindender Krümmung (also mit durchweg Euklidischem Bogenelement) können sehr wohl geschlossen in sich zurückkehren, so daß sie nur endlichen Gesamtinhalt darbieten. Von den Lehrbüchern ist bisher, soviel ich weiß, nur das von Killing auf diese Dinge eingegangen (Einführung in die Grundlagen der Geometrie, I, 1893)[1]. Und doch handelt es sich um eine Fragestellung, die für alle Differentialgeometrie fundamental ist und die sich sinngemäß auf beliebige höhere Differentialformen überträgt: um die Frage, welche Zusammenhangsverhältnisse der unbegrenzt fortgesetzten Mannigfaltigkeit mit einer vorgegebenen Form des ds^2 verträglich sind.

d) Wir halten im folgenden an der Annahme fest, daß die u, v nur reeller Werte fähig sein sollen. Infolgedessen können wir die Differentialformen $E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ in ihrer Abhängigkeit von den du, dv nach den Gesichtspunkten einteilen, welche das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen an die Hand gibt. Nehmen wir, wie bisher, das ds^2 als positiv definit an, so haben wir nur eine der hierbei zu unterscheidenden Klassen herausgegriffen. Schon das Studium der Lorentzgruppe hatte uns veranlaßt, indefinite Formen, wie $dx^2 - c^2\,dt^2$ (oder, bei 4 Variablen, $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2$) heranzuziehen. Es wird zu untersuchen sein, wie sich unsere Entwicklungen auf solche indefinite Formen übertragen, und was bei ihnen abgeändert oder ergänzt werden muß.

---

[1]) Vgl. auch die inzwischen erschienene Arbeit von H. Hopf: Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. Math. Ann. 95 (1926). (H.)

Die Definitionen, welche wir für K gaben, unterliegen beim Übergang zu diesen indefiniten Fällen gewissen Beschränkungen. Beispielsweise können wir jetzt nicht, wie auf S. 155 geschah, über den vollen Umfang eines geodätischen Kreises integrieren, sondern wir müssen uns, gemäß der Schlußbemerkung des damaligen Paragraphen, auf ein Segment desselben beschränken.

C. Riemanns n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.
I. Die formalen Grundlagen.

Die Entwicklungen, welche wir im Abschnitt B gegeben haben, sind bereits so zurechtgemacht, daß sie von selbst zu den Erweiterungen überleiten, die Riemann für n Dimensionen entwickelt hat. Wir tragen diese Erweiterungen so vor, daß einige ganz in Riemanns Sinne liegende Entwicklungen, welche sehr bald von anderer Seite gegeben wurden, gleich mit zur Geltung kommen.

§ 1. Historische Angaben.

Von Riemann selbst kommen für uns in Betracht:

1. Der *Habilitationsvortrag* (von 1854): *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, nach dem Tode Riemanns (1866) von Dedekind in Bd. 13 der Göttinger Abhandlungen (1868) veröffentlicht[1]).

2. Die *Pariser Preisarbeit* (von 1861): *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab ill. Academia Parisiensi propositae*[2]). Die Aufgabe behandelt ein Problem der Wärmeleitung, das uns als solches hier nicht interessiert; es findet sich aber darin ein kurzer Absatz, der von den quadratischen Differentialformen von n Veränderlichen handelt (vgl. S. 401—404 der Gesammelten Werke, 2. Auflage), und dieser ist für uns grundlegend. Die Arbeit (welche den Preis der Pariser Akademie nicht erhielt) wurde erst 1876 durch die von Dedekind und Weber besorgte erste Ausgabe von Riemanns gesammelten Werken bekannt.

Nr. 1 enthält, weil es sich um einen Vortrag vor der Gesamtfakultät handelte, kaum Formeln, aber um so mehr prinzipielle Begriffsentwicklungen. Was Gauß in seinen Disquisitiones sorgfältig verschwiegen hatte: daß es sich bei ihm nicht nur um Weiterentwicklung der Geometrie, sondern um ihre Grundlegung (und damit die Grundlegung der theoretischen Naturwissenschaft überhaupt) handle, steht hier voran. Davon wurde in Bd. 1 bereits einiges erzählt. Im jetzigen Zusammen-

---

[1]) Vgl. Note 1, S. 154. [2]) Vgl. Note 2, S. 155.

hang handelt es sich nur darum, daß Riemann in Nr. 1 die Grundlinien für eine systematische Behandlung der quadratischen Differentialformen mit n Veränderlichen: $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ gegeben hat, insbesondere bei ihnen eine Invariante definiert, die als genuine Verallgemeinerung der im Falle $n = 2$ von uns mit $[\Omega]$ bezeichneten Invariante erscheint. Von hier aus dann, wie noch ausführlicher zu schildern, die von Riemann gegebene Verallgemeinerung des Gaußischen Krümmungsmaßes auf n Dimensionen. — Die Veröffentlichung von Nr. 1 fiel in die Zeit, als ich eben anfing, mich selbständig mit mathematischen Problemen zu beschäftigen. So habe ich noch lebhafte Erinnerung an den außerordentlichen Eindruck, den Riemanns Gedankengänge damals auf die jungen Mathematiker machte. Vieles erschien uns dunkel und schwerverständlich und doch wieder von unergründlicher Tiefe, wo der heutige Mathematiker, der alle diese Dinge von vornherein in seine Denkweise aufgenommen hat, nur noch die Klarheit und Prägnanz der Auseinandersetzung bewundert.

Nr. 2 bringt dann, in allerdings sehr knapper Fassung, die ergänzenden Formeln, insbesondere die Definition des Krümmungsmaßes bei beliebigem ds^2. Man fragt sich, wie Riemann so wichtige Entwicklungen einer Preisarbeit anvertrauen konnte, die dann unveröffentlicht liegen blieb (weil die Akademie mit dem neuen Gedankeninhalte nichts anzufangen wußte). Es ist hier einer der Punkte, wo die ökonomischen Verhältnisse in die Entwicklung unserer Wissenschaft hineinragen. Die Beteiligung an akademischen Preisbewerbungen war damals noch eines der wenigen Mittel, wie die mathematischen Forscher hoffen durften, ihre schmalen Einkünfte zu ergänzen. Preise, welche hinterher als Anerkennung für große wissenschaftliche Leistungen von akademischen Körperschaften oder Stiftungen frei vergeben werden, waren damals noch nicht Sitte.

Die Veröffentlichung von Nr. 1 im Jahr 1868 gab sofort zu einer großen Reihe weiterbauender Abhandlungen anderer Autoren Anlaß. Von Helmholtz' hierher gehörigen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie ist an gegenwärtiger Stelle nicht zu reden, ebensowenig von dem parallellaufenden Ausbau der projektiven Geometrie, an dem ich selbst beteiligt war. Es sind drei andere Autoren, die für uns in erster Linie in Betracht kommen: Beltrami, Christoffel und Lipschitz. Indem ich mir vorbehalte, auf die historischen Bedingungen der einzelnen Arbeiten noch zurückzukommen, gebe ich hier vorweg die äußerlichen Daten.

Von Beltrami kommen vor allen Dingen zwei Arbeiten in Betracht: seine allgemeine Theorie der Räume konstanter Krümmung (1868, Annali di Mat. [2], II = Werke, Bd. 1) und seine Untersuchung über Differentialparameter bei beliebig vorgegebenem Bogenelement (1869, Atti di Bologna [2], VIII = Werke, Bd. 2).

Christoffel stellt das Äquivalenzproblem zweier beliebiger Differentialformen $\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ und $\sum b_{ik}\,dy_i\,dy_k$ voran (Crelles Journal 70: Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, datiert 3. Jan. 1869). Wie weit er dieses erledigt, und welche Ausnahmefälle er ausdrücklich beiseite läßt, wird später zu besprechen sein. Hier sei vorab nur bemerkt, daß er die Riemannsche Invariante $[\Omega]$ seinerseits auffindet und in den Mittelpunkt der Betrachtung rückt.

Lipschitz hat eine größere Zahl von Arbeiten (alle in Crelles Journal). Die erste ist vom 4. Jan. 1869 datiert und unmittelbar hinter der Christoffelschen Abhandlung im ersten Hefte des 70. Bandes abgedruckt. Lipschitz untersucht dort insbesondere die (von Christoffel ausgeschlossene, aber von Riemann in Nr. 2 explizite beantwortete) Frage, wann sich $\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ in eine Form mit konstanten Koeffizienten und damit in die „Euklidische" Form $\sum dy_i^2$ verwandeln läßt. Von hier aus wird er ebenfalls zur Invariante $[\Omega]$ geführt und findet, daß ihr identisches Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung ist. — Von den weiteren Lipschitzschen Arbeiten ist diejenige in Bd. 72 (1870) hervorzuheben, weil dort S. 16, 17 die invariantenerzeugenden Prozesse, deren auch wir uns bedienen, in übersichtlicher Weise zusammenstellt und weiterhin nach verschiedenen Richtungen hin verwandt werden. Wir nennen endlich die Arbeit in Bd. 82 (1877), die an das Erscheinen von Riemanns Preisschrift anknüpft und die volle Verbindung von Riemanns eigener Definition der Form $[\Omega]$ mit den von Lipschitz selbst entwickelten Formeln herstellt.

Ich gebe dem nunmehr zu erstattenden Berichte wieder eine weniger historische als systematische Form, wie sie sich an unsere früheren Darlegungen anschließt, im übrigen aber gerade als Erträgnis der vorgenannten Literatur anzusehen ist.

§ 2. Differentialformen mit nur ersten Differentialen.

Als Substrat unserer Betrachtungen haben wir fortan die Mannigfaltigkeit (den Raum) irgend n unabhängiger Veränderlicher $x_1 \ldots x_n$, welche wir der G_∞ aller Punkttransformationen (oder besser: aller Koordinatentransformationen)

$$x_i = \varphi_i\,(y_1 \cdots y_n) \tag{1}$$

im Sinne von S. 136 unterworfen denken. Da sich das System der Differentiale $dx_1 \ldots dx_n$ bei diesen Transformationen nach den Ausführungen auf S. 137 in jedem Punkt linear umsetzt

$$dx_i = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\,dy_k\,, \tag{2}$$

so nennen wir es einen *Vektor*, — können es uns auch, wie schon Cauchy in seiner Begründung der Differentialrechnung vorschlug, in jedem Augenblicke durch eine vom Punkte (x) auslaufende Strecke von endlicher Länge veranschaulicht denken. Die in Kap. I entwickelten Begriffe der linearen Invariantentheorie finden hier unmittelbare Anwendung, nur daß die Substitutionsdeterminante von (2) im allgemeinen von Eins verschieden ist (während wir in Kap. I unimodulare Substitutionen behandelten).

Als Objekt unserer Untersuchungen denken wir uns in erster Linie lineare Formen

$$\sum u_i\, d x_i\,, \tag{3}$$

wo die u_i von den $x_1 \ldots x_n$ selbst abhängen werden, so daß wir einen „Pfaffschen Ausdruck" vor uns haben; der einfachste Fall ist, daß es sich um das Differential

$$d f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d x_i$$

irgend einer Funktion f der dx handelt. Wir nennen das System der u_i — falls $\sum u_i\, dx_i$ eine Invariante ist — einen kontragredienten Vektor[1]).

Wir schreiten ferner zu Größensystemen, die sich bei den Transformationen (1) wie Verbindungen zweiten Grades der dx_i oder auch der u_i substituieren und die wir dann kogrediente bzw. kontragrediente Tensoren nennen. Dabei unterscheiden wir den symmetrischen und den antisymmetrischen Fall. Die Komponenten eines symmetrischen Tensors substituieren wir im kogredienten Falle wie die

$$d x_1^2,\ 2\, d x_1\, d x_2,\ d x_2^2,\ \ldots \tag{4a}$$

oder auch, wenn d und δ zwei kogrediente Vektoren sind, wie die bilinearen Verbindungen

$$d x_1\, \delta x_1,\ d x_1\, \delta x_2 + d x_2\, \delta x_1,\ d x_2\, \delta x_2,\ \ldots \tag{4b}$$

analog im kontragredienten Falle. — Als einfachster Fall eines antisymmetrischen Tensors werden uns die Unterdeterminanten aus den Komponenten zweier Vektoren d, δ beschäftigen

$$p_{ik} = d x_i\, \delta x_k - d x_k\, \delta x_i\,; \tag{5}$$

man überlege sich die linearen Substitutionen, welche die Größensysteme (4) und (5) entsprechend den Transformationen (2) erleiden. Indem wir uns sogleich eine quadratische Form der dx_i gegeben denken

$$\sum a_{ik}\, d x_i\, d x_k\,, \tag{6}$$

---

[1]) Statt „kontragredienter Vektor" sagt man heute „kovarianter Vektor", ebenso „kontravariant" statt „kogredient". Bei Tensoren ist der Sprachgebrauch noch schwankend. Vgl. auch S. 193, Note 1. (H.)

haben wir in den a_{ik} einen zu den Komponenten (4a) kontragredienten Tensor. Eine entsprechende alternierende Form

$$\sum \lambda_{ik} p_{ik} \tag{7}$$

wird uns viel beschäftigen.

Es hat keinen Zweck, hier systematisch von entsprechenden Differentialformen höheren Grades, insbesondere von den höheren Graßmannschen Stufen zu reden. Alles, was in der elementaren Invariantentheorie bei algebraischen Formen zu sagen ist, alle Formenarten, welche in der affinen oder projektiven Geometrie eine Rolle spielen, — kommen hier in der Invariantentheorie der Differentialformen mit nur ersten Differentialen ebenfalls in Betracht.

Ich möchte hier nur von der Form $[\Omega]$, welche den Zähler des Riemannschen Krümmungsmaßes einer quadratischen Form (6) abgibt, einiges Vorläufige sagen. Sie erscheint algebraisch als eine gewisse quadratische Verbindung der in (5) eingeführten Unterdeterminanten, die wir in der Folge so schreiben werden:

$$[\Omega] = \sum (ik,\ rs)\, p_{ik} p_{rs}\,. \tag{8}$$

Nehmen wir im Anschluß an Kap. II $n = 4$, so ist ein derartiges $[\Omega]$ in der projektiven Geometrie (wo die p_{ik} als homogene Linienkoordinaten des dreifach ausgedehnten Raumes interpretiert werden) die linke Seite der Gleichung eines „Linienkomplexes zweiten Grades". Daran knüpft sich für mich eine merkwürdige, persönliche Erinnerung, die zeigt, wie wenig die Zusammenhänge zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten, die wir hinterher als selbstverständlich ansehen, im status nascendi den Nächstbeteiligten bewußt zu sein brauchen. Ich hatte mir im Herbst 1868, in Anknüpfung an die Untersuchungen meines verstorbenen Lehrers Plücker, die allgemeine Theorie der genannten Linienkomplexe als Thema gewählt. Referent war Lipschitz, der, wie vorhin bereits erwähnt, selbst damals mit der Aufstellung und Untersuchung der Differentialform $[\Omega]$ intensiv beschäftigt war. Lipschitz hat damals auch ausführlich mit mir über den Gegenstand meiner Dissertation gesprochen. Aber kein Wort über die Beziehung meiner Arbeit zu dem Riemannschen Habilitationsvortrag, der doch in jener Zeit für Lipschitz selbst sozusagen die tägliche Nahrung abgab! Und als ich einige Jahre später (1872) mein Erlanger Programm schrieb, mit der ausdrücklichen Absicht, über die nebeneinander herlaufenden Betrachtungen der Geometer eine Übersicht von einem einheitlichen Standpunkte aus zu gewinnen, habe ich zwar stark hervorgehoben, daß eine Punkttransformation (1) für eine unendlich kleine Partie des Raumes immer den Charakter einer linearen Transformation hat, aber ich bin an den Arbeiten von Riemann, Christoffel und Lipschitz, die den schönsten Beleg für meine Auffassungen gebildet hätten, immer noch vorbeigegangen.

§ 3. Vorbemerkungen über das Riemannsche Krümmungsmaß.

Wir denken uns fortan eine quadratische Differentialform adjungiert:

$$f(d, d) = \sum_1^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \tag{9}$$

die wir als Quadrat eines Bogenelementes des R_n interpretieren und dementsprechend mit ds^2 bezeichnen. Die a_{ik} sind irgendwelche in dem für uns in Betracht kommenden Bereiche reguläre Funktionen der x. Dabei nehmen wir bis auf weiteres wieder an, daß nur reelle Werte der x_i (wie auch der a_{ik}) in Betracht kommen sollen und daß unter dieser Annahme ds^2 positiv definit sei. Die Determinante von (9)

$$|a_{ik}| = a \tag{10}$$

ist dann ebenfalls positiv.

Wir ziehen zunächst die algebraische Invariantentheorie der gewöhnlichen quadratischen Formen heran und stellen folgende Sätze zusammen:

1. Mit (9) ist auch die Polare

$$f(d, \delta) = \sum a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k \tag{11}$$

eine Invariante. Ferner haben wir die elementare Kombinante:

$$F = \begin{vmatrix} f(d,d) & f(d,\delta) \\ f(\delta,d) & f(\delta,\delta) \end{vmatrix} \tag{12}$$

(die dem vierfachen Quadrat des unendlich kleinen Dreiecksinhaltes entspricht, der von dem vom Punkte auslaufenden Vektoren d und δ bestimmt wird).

2. Wenn wir dieses F ausrechnen, bekommen wir zunächst:

$$F = \sum (a_{ir}\, a_{ks} - a_{kr}\, a_{is}) \begin{pmatrix} dx_i\, dx_r\, \delta x_k\, \delta x_s + dx_k\, dx_s\, \delta x_i\, \delta x_r \\ - dx_i\, dx_s\, \delta x_k\, \delta x_r - dx_k\, dx_r\, \delta x_i\, \delta x_s \end{pmatrix}, \tag{13}$$

die Summe genommen über alle Kombinationen i, k bzw. r, s wo $r \gtrless s$. Wir können hier nach den Graßmannschen Größen zweiter Stufe (5) ordnen und erhalten:

$$F = \sum (a_{ir}\, a_{ks} - a_{kr}\, a_{is})\, p_{ik}\, p_{rs}\,. \tag{14}$$

Dabei beachte man, daß zwischen irgend 6 solchen p_{ik}, die zusammen dieselben 4 verschiedenen Indizes enthalten, quadratische Identitäten nach folgendem Muster bestehen (vgl. S. 6,7):

$$P = p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0\,. \tag{15}$$

Wir können also die rechte Seite in (14) (indem wir die P mit beliebigen Konstanten multipliziert hinzuaddieren) verschiedentlich modifizieren. Unter all den so entstehenden Ausdrücken von F ist derjenige, der in (14) hingeschrieben ist, dadurch ausgezeichnet, daß er „normiert" ist, d. h. daß zwischen den Koeffizienten der Glieder $p_{ik}p_{rs}$ dieselben Identitäten bestehen, wie zwischen den $p_{ik}p_{rs}$ selbst. In der Tat hat man der Gleichung (15) entsprechend folgende Identitäten:

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{34} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{usw.} \tag{16}$$

3. Die Determinante $|a|$ ist jetzt keine Invariante. Geht $\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ bei den Substitutionen (2) in $\sum b_{ik}\,dy_i\,dy_k$ über, so hat man vielmehr

$$|b_{ik}| = r^2\,|a_{ik}|, \tag{17}$$

unter r die Funktionaldeterminante der $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)$ verstanden. Ebensowenig ist die „zugeordnete" quadratische Form (welche aus a durch „Ränderung" mit kontragredienten Variabeln u entsteht):

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{ik} & u_i \\ u_k & 0 \end{vmatrix} \tag{18}$$

an sich eine Invariante. Man erhält aber eine solche, wenn man Φ durch a dividiert. Speziell wollen wir setzen

$$-\frac{\Phi}{a} = \sum a^{ik}\,u_i\,u_k \tag{19}$$

$\left(\text{wo } a^{ik} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{ik}}\right)$, und (19) als *reziproke* Form von f bezeichnen, weil sich zeigt, daß die Beziehung der beiden Formen zueinander eine durchaus gegenseitige ist.

4. Aus der Invarianz von (19) folgt, daß die a^{ik} zu den binären Produkten $dx_i\,dx_k$ kogredient sind. Wir werden also beispielsweise aus F (14) wieder Invarianten erhalten, wenn wir für die $dx_i\,dx_k$ oder auch die $\delta x_i\,\delta x_k$ oder schließlich für beide, die ihnen kogredienten a^{ik} eintragen. Dies gibt freilich nichts neues:

Bei dem ersten Schritte erhalten wir $(n-1)\,f(\delta,\delta)$ bzw. $(n-1)\,f(d,d)$ bei dem zweiten Schritt den Zahlenwert $n\,(n-1)$[1].

5. Wir gedenken noch des invarianten Ausdrucks, der bei Zugrundelegung des f für das Raumelement der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit resultiert. Man denke sich von einem Punkte (x) auslaufend n linear unabhängige Vektoren:

$$d^{(1)},\ d^{(2)},\ \ldots,\ d^{(n)}.$$

---

[1]) Man kontrolliert solche Angaben am einfachsten, indem man $f(d,d)$, was sich immer durch Einführung linearer Verbindungen der dx erreichen läßt, gleich $\sum c_i\,dy_i^2$ nimmt. Die zugeordnete Form bekommt dann die Gestalt $\sum \frac{v_i^2}{c_i}$, F aber wird $\sum c_i\,c_k\,p_{ik}^2$.

Es wird sich dann einfach um die Determinante der bezüglichen $dx_i^{(k)}$, multipliziert mit der Quadratwurzel aus a handeln:

$$d\omega = \sqrt{a} \begin{vmatrix} d^{(1)}x_1 & \cdots & d^{(1)}x_n \\ d^{(2)}x_1 & \cdots & d^{(2)}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d^{(n)}x_1 & \cdots & d^{(n)}x_n \end{vmatrix} \tag{20}$$

6. Wenden wir uns jetzt zur höheren Theorie unseres f. Es handelt sich bei ihr darum, daß die a_{ik} von den $x_1 \ldots x_n$ abhängen (daß man in ihnen ein Feld kontragredienter Tensoren vor sich hat[1]). Man wird nach Invarianten — Differentialinvarianten — suchen, welche neben den a_{ik} deren erste, zweite, ... Differentialquotienten nach den x enthalten* [für deren Invarianz statt der G_∞ (1) dann eine entsprechend erweiterte G_∞ maßgebend ist]. Als einfachste dieser Invarianten ergibt die nähere Untersuchung den Zähler des schon in § 2 genannten Riemannschen Krümmungsmaßes, den wir mit $[\Omega]$ bezeichneten:

$$[\Omega] = \sum (ik, rs)\, p_{ik}\, p_{rs}, \tag{21}$$

auf dessen Bildungsgesetz wir sofort eingehen werden. *Der Quotient*

$$K_R = -\frac{1}{2}\frac{[\Omega]}{F} \tag{22}$$

ist dann die Definition des Riemannschen Krümmungsmaßes.

Für $n = 2$, wo nur ein einziges $p_{ik} = p_{12}$ vorhanden ist, welches dann im Zähler und Nenner von (22) als Quadrat auftritt, hebt sich dieses eben darum eo ipso weg, K_R wird eine Funktion der a_{ik} und ihrer Differentialquotienten, also eine *Ortsinvariante*; diese fällt mit dem *Gaußschen* Krümmungsmaß zusammen. Für größere Werte von n aber wird K_R außerdem von den p_{ik}, d. h. von der Wahl des Büschels der Vektoren $\varkappa d + \lambda\delta$ abhängen; wir nennen es darum eine *Büschelinvariante.*

Es gibt natürlich besondere Fälle, wo die Koeffizienten der $p_{ik}p_{rs}$ im Zähler den entsprechenden Koeffizienten des Nenners proportional sind, und unter ihnen ist wieder derjenige ausgezeichnet, wo K_R auch von den $x_1 \ldots x_n$ unabhängig, d. h. überhaupt eine Konstante wird. Dies sind die Mannigfaltigkeiten, welche Riemann insbesondere als *Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung*[2]) bezeichnet. Hat das konstante K_R insbesondere den Wert 0, so spricht man von einer *Euklidischen* Mannigfaltigkeit.

Wir wollen auf K_R hier gleich den unter 4. genannten Substitutions-

---

[1]) Siehe Kap. I, S. 38 ff.

[2]) Vgl. hierzu F. Schur: Räume konstanten Krümmungsmaßes II, Math. Ann. 27 (1886), S. 537.

prozeß einmal oder zweimal anwenden. Das erstemal erhalten wir eine Invariante, die wir als *Richtungsinvariante* bezeichnen (weil sie nur noch ein System von dx_i und zwar homogen vom nullten Grade enthält)

$$(23)\qquad \frac{\sum K_{ik}\,dx_i\,dx_k}{\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k} = -\frac{\sum (ik,rs)\begin{Bmatrix} a^{ir}\,dx_k\,dx_s + a^{ks}\,dx_i\,dx_r \\ -a^{is}\,dx_k\,dx_r - a^{kr}\,dx_i\,dx_s\end{Bmatrix}}{2\,(n-1)\,f(d,d)}.$$

Das zweitemal aber eine *Ortsinvariante*

$$(24)\qquad K = \frac{\sum K_{ik}\,a^{ik}}{n} = -\frac{\sum (ik,rs)\,(a^{ir}\,a^{ks} - a^{is}\,a^{kr})}{n\,(n-1)}.$$

(Der auf den linken Seiten von (23), (24) auftretende Ausdruck K_{ik} ist in leichtverständlicher Weise durch die rechten Seiten definiert). Beide Invarianten werden uns noch beschäftigen. Im besonderen Falle $n = 4$ bilden sie neben dem K_R den Ausgangspunkt der Einsteinschen Gravitationstheorie, bzw. der von Hilbert in seinen „Grundlagen der Physik" (Göttinger Nachrichten vom Dez. 1915) gegebenen Entwicklungen. Der Gedanke, die $dx_i\,dx_k$ usw. in K_R durch die ihnen kogredienten a^{ik} zu ersetzen, ist übrigens bereits von Lipschitz in seinen ersten Untersuchungen benutzt worden[1]).

§ 4. Die Gleichungen der geodätischen Linien und die mit ihnen zusammenhängenden Invarianten*.

Wir haben schon bei $n = 2$ im Anschluß an Riemanns allgemeinen Ansatz alles so weit vorbereitet, um die ferneren Entwicklungen glatt auf beliebiges n übertragen zu können.

Wieder betrachten wir statt der geodätischen Linien (die das Objekt der rein geometrischen Betrachtung sein werden) in erster Linie die sie definierenden Bewegungsgleichungen eines Punktes, der sich im R_n mit dem Bogenelemente ds^2 kräftefrei bewegt. Wir haben dementsprechend das Variationsproblem

$$(25)\qquad \delta\int\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \delta\int\frac{\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k}{dt^2}\,dt = 0$$

und finden (siehe überall den § 2 des vorigen Abschnittes), daß für beliebige δx_k die Invariante verschwinden muß:

$$(26)\qquad 2d\,(\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k) - \delta\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

Die bei der Ausrechnung dieses Ausdrucks zunächst auftretenden Glieder mit $d\delta$ heben sich gegenseitig weg; wir haben also ein lineares

[1]) Vgl. insbesondere Crelles Journal 72 (1870), S. 33 und 34, Fußnote. Was wir im Texte K nennen, heißt bei Lipschitz $-\frac{\Psi}{n\,(n-1)}$ und ebenso bei Hilbert $-\frac{K}{n\,(n-1)}$.

Aggregat der Differentiale δx_r, das wir mit Lipschitz folgendermaßen bezeichnen:

(27) $$2\sum \Psi_r(d,d)\,\delta x_r\,.$$

Hier sind die Ψ_r folgende Verbindungen der dx, d^2x:

(28) $$\Psi_r(d,d) = \sum_i a_{ir}\,d^2x_i + \sum_{i,k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right)dx_i\,dx_k\,.$$

Wir bekommen also als Bewegungsgleichungen und damit als Definition der von dem kräftefreien Punkt durchlaufenen Bahnkurven, d. h. der geodätischen Linien, die Formeln:

(29) $$\Psi_r(d,d) = 0\,.$$

Zugleich ergibt sich aus der Invarianz von (27), daß allgemein die Ausdrücke $\Psi_r(d,d)$ einen kontragredienten Vektor vorstellen.

Wir erhalten einen kogredienten Vektor, indem wir die Ψ_r mit den Koeffizienten a^{rs} der zur Grundform reziproken Form multiplizieren und addieren. Die Komponenten dieses Vektors werden:

(30) $$Dx_s = d^2x_s + \sum_{i,k\,r}\frac{a^{rs}}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right)dx_i\,dx_k\,.$$

Also nicht die d^2x_s selbst, sondern erst die solcherweise vervollständigten Ausdrücke haben Vektorcharakter.

Im übrigen ist deutlich, daß wir in diesen Sätzen statt der $\Psi_r(d,d)$ auch die etwas allgemeineren Ausdrücke

(31) $$\Psi_r(d,\delta) = \sum_i a_{ir}\,d\,\delta x_i + \sum_{i,k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right)dx_i\,\delta x_k$$

setzen dürfen.

Die hier überall auftretenden Verbindungen erster Differentialquotienten der a_{ik}:

(32) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r}\right)\quad\text{bzw.}\quad\sum_s\frac{a^{rs}}{2}\left(\frac{\partial a_{is}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{ks}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_s}\right)$$

haben sich natürlich jedem dargeboten, der sich mit den hier vorliegenden Problemen beschäftigt hat. So zunächst Riemann, Christoffel und Lipschitz. Jeder dieser Autoren hat auch für sie besondere Abkürzungen eingeführt. Die Einseitigkeit der literarischen Entwicklung hat es dann mit sich gebracht, daß einzig die von Christoffel gewählten Abkürzungen

(33) $$\binom{i\,k}{r}\quad\text{bzw.}\quad\left\{\begin{matrix}i\,k\\ r\end{matrix}\right\}$$

Verbreitung gefunden haben und *Christoffelsche Symbole erster* bzw. *zweiter Art* genannt werden. Diese bieten sich also in der Theorie der geodätischen Linien von selbst dar. Die Invariante (26) könnte man aber auch, ohne von einem Variationsproblem zu sprechen, aus rein formalen Gründen als einfachste ihrer Art hinschreiben.

§ 5*. Das Riemannsche [Ω].

Wir beginnen, im Anschluß an Riemann, mit den Gleichungen $\Psi_r = 0$. Wir ziehen von einem Punkte (x) aus ein ganzes „Büschel" von Vektoren

$$\varkappa d + \lambda \delta$$

und denken uns jeden derselben geodätisch fortgesetzt. So entsteht, was wir eine durch (x) laufende „geodätische Fläche" nennen werden. Wir gebrauchen hier nur erst, was wir als ihr angehörige „Umgebung" des Punktes O bezeichnen können, und was, den Formeln (29) von S. 156 entsprechend, durch die $3n$ Differentialgleichungen gegeben sein wird:

(34) $$\Psi_r(d, d) = 0, \quad \Psi_r(d, \delta) = 0, \quad \Psi_r(\delta, \delta) = 0.$$

Je drei nebeneinanderstehende dieser Gleichungen haben Kombinantennatur, d. h. sie bleiben zusammengenommen ungeändert, wenn man statt d und δ irgend zwei andere Vektoren des durch sie bestimmten Büschels $\varkappa d + \lambda \delta$ einführt. — Statt der Gleichungen (34) können wir der Formel (30) entsprechend auch schreiben:

(35) $$\left|\begin{aligned} & d^2 x_s + \sum_{i,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} d x_i\, d x_k = 0, \\ & d\,\delta x_s + \sum_{i,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \frac{d x_i\, \delta x_k + \delta x_i\, d x_k}{2} = 0, \\ & \delta^2 x_s + \sum_{i,k} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \delta x_i\, \delta x_k = 0. \end{aligned}\right.$$

Der zweite Schritt zur Bildung des [Ω] wird nun sein, daß wir den Ausdruck

(36) $$\Omega = \delta\delta \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k - d\delta \sum a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k + dd \sum a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k$$

ins Auge fassen. Es bieten sich genau dieselben Bemerkungen, die wir schon bei $n = 2$ machten: Ω ist eine Invariante gegenüber beliebigen Substitutionen (1), weil es aus lauter Invarianten zusammengesetzt ist. Es enthält ferner, ausgerechnet, neben den Differentialen d, δ nur noch solche der zweiten Ordnung $d^2, d\delta, \delta^2$. Es bleibt schließlich gegenüber linearen Substitutionen

$$d' = \varkappa d + \lambda \delta, \quad \delta' = \mu d + \nu \delta,$$

sofern wir $\varkappa\nu - \lambda\mu = 1$ nehmen, völlig ungeändert (was den genaueren Begriff der „Kombinante" als einer unverändert bleibenden Form, nicht nur eines geltend bleibenden Gleichungssystems ausmacht). Vielleicht mag man sich auch überlegen, daß Ω unter allen Ausdrücken, welche man diesen drei Aussagen entsprechend aufbauen kann, das einfachste ist.

Und nun erhalten wir das gesuchte [Ω]

(37) $$[\Omega] = \sum (ik, rs)\, p_{ik}\, p_{rs},$$

indem wir in (36) für die zweiten Differentiale $d^2, d\delta, \delta^2$ ihre Werte aus (35) eintragen. In der Tat entsteht dann eine Form, welche nur noch die ersten Differentiale $dx, \delta x$, — jede dieser Größenreihen homogen im 2. Grade — enthält, welche außerdem die Kombinanteneigenschaft besitzt und eben darum eine homogene Funktion zweiten Grades der Determinanten p_{ik} sein muß. Die Koeffizienten aber, welche wir kurzweg mit (ik, rs) bezeichnet haben, werden neben den a_{ik} selbst deren erste und zweite Ableitungen von den x enthalten. Ihre ausgerechneten Werte werden wir sogleich in allgemeiner Form angeben, bemerken aber vorweg, daß wir diese allgemeine Form nie gebrauchen, sondern in den Fällen, welche wir betrachten, uns das spezielle $[\Omega]$ lieber jedesmal direkt bilden.

Wir sind bei der Herstellung des $[\Omega]$ aus Ω durchaus Riemann gefolgt. Lipschitz hat in seiner schon oben genannten Arbeit in Crelle 82 (1877) den Prozeß vollends ins Formentheoretische emporgehoben, indem er die in Ω auftretenden zweiten Differentiale nicht durch die Gleichungen $\Psi_r = 0$, sondern durch Subtraktion einer geeigneten Verbindung der Ausdrücke $\Psi_r(d, d)$, $\Psi_r(d, \delta)$, $\Psi_r(\delta, \delta)$ entfernt. Sein Resultat schreibt sich in unserer Bezeichnung so:

$$(38) \qquad [\Omega] = \Omega - 2\left\{\sum a^{rs}\,\Psi_r(d,\delta)\,\Psi_s(d,\delta) - \sum a^{rs}\,\Psi_r(d,d)\,\Psi_s(\delta,\delta)\right\}.$$

Man überzeugt sich sofort, daß das rechter Hand zugesetzte Glied nicht nur eine Invariante der Vektoren d, δ, sondern auch eine Kombinante derselben ist[1]).

§ 6. Die ausgerechnete Formel für das Riemannsche Krümmungsmaß.

Ich verweise zum Schluß noch einmal auf die Definition des Riemannschen Krümmungsmaßes:

$$(22) \qquad K_R = -\frac{1}{2}\frac{[\Omega]}{F} = -\frac{\sum (ik, rs)\, p_{ik}\, p_{rs}}{2\sum (a_{ir} a_{ks} - a_{is} a_{kr})\, p_{ik}\, p_{rs}}$$

und teile die ausgerechneten Werte der Koeffizienten (ik, rs) mit,

---

[1]) Wir können im Text die Beziehungen zur Mechanik, welche Lipschitz voranstellt, leider nicht verfolgen. Immerhin wollen wir angeben: denkt man sich die x_i als Funktionen der „Zeit" t, läßt also den Punkt (x) — den wir mit der „Masse" 1 ausstatten wollen — eine bestimmte Bahn mit gegebener Geschwindigkeit und Beschleunigung durchlaufen, so hat man in

$$\frac{1}{dt^4}\sum a^{rs}\,\Psi_r(d,d)\,\Psi_s(d,d)$$

diejenige Größe, welche man nach Gauß als *Zwang* der Punktbewegung bezeichnet. Indem Lipschitz dementsprechend die Überschrift seines Aufsatzes wählte (Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges), ist dieser, wie es scheint, bisher von den Geometern nicht hinreichend beachtet worden.

wie sie Riemann (S. 402 der Werke, 2. Aufl.) in seiner Pariser Preisarbeit selbst angibt und man sie in vielen Büchern findet:

$$(ik, rs) = \frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial x_k \partial x_s} + \frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial x_i \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{is}}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial^2 a_{kr}}{\partial x_i \partial x_s} + 2 \sum_{t,u} a^{tu} \left(\binom{ir}{t} \binom{ks}{u} - \binom{is}{t} \binom{kr}{u} \right). \tag{39}$$

Man wird diese Formeln durch die quadratischen Identitäten $P = 0$, die für $n \geqq 4$ zwischen den p_{ik} bestehen (S. 6, 7), verschiedentlich modifizieren können. Die mitgeteilten Werte der (ik, rs) sind dadurch eindeutig festgelegt, daß man sie, wie die Koeffizienten des Nenners, „normiert" hat, d. h. so gewählt hat, daß zwischen drei (ik, rs) mit denselben vier untereinander verschiedenen Indizes dieselbe lineare Relation besteht, wie zwischen den entsprechenden $p_{ik} p_{rs}$. Von den (ik, rs) sind dann, wie man sofort abzählt, nur noch $\frac{n^4 - n^2}{12}$ linear unabhängig.

Analog wird für die Komponenten unserer einfachsten Richtungsinvariante:

$$K_{ik} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_r \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{Bmatrix} kr \\ r \end{Bmatrix} \right) + \sum_{r,s} \left(\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix} \right) \right]. \tag{40}$$

unter $\{\ \}$ die Christoffelschen Symbole zweiter Art verstanden. Ausdrücke dieser Art, noch etwas verallgemeinert, finden sich zuerst in der Arbeit von Christoffel.

D. Riemanns n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. II. Normalkoordinaten. Geometrische Deutungen.

Wir haben bisher die formalen Bildungsgesetze vorangestellt, wie sie in Riemanns Preisarbeit skizziert sind: statt dessen greifen wir jetzt auf die geometrischen Überlegungen zurück, die Riemann in seinem Habilitationsvortrag gegeben hat (1854).

§ 1. Riemannsche Normalkoordinaten und die Gestalt des zugehörigen ds^2.

Es handelt sich wieder um eine gewisse Erweiterung dessen, was wir schon bei $n = 2$ gemacht haben, zunächst die Einführung eines besonderen zweckmäßigen Koordinatensystems (vgl. S. 158, 159). Als Koordinatenanfangspunkt O wählen wir irgend einen Punkt des unserer Betrachtung unterliegenden Raumstückes. Wir denken uns ferner die sämtlichen, von O auslaufenden geodätischen Linien konstruiert, welche einen endlichen Bereich um O herum (auf dessen Betrachtung wir uns jetzt beschränken wollen) einfach überdecken werden. Jeder Punkt des Bereiches wird dann bestimmt sein, wenn wir seine geodätische Entfernung ϱ von O und das Azimut angeben, unter dem die ihn mit O verbindende geodätische Linie von O ausläuft. Um dementsprechende Formeln aufzustellen, denken wir uns die ursprünglichen Koordinaten x_i durch eine Hilfstransformation vorab so abgeändert, daß das ds^2 im Punkte O selbst die Gestalt $\sum dx_i^2$ annimmt (was natürlich auf unendlich viele Weisen erreicht werden kann). Die Richtung einer von O auslaufenden geodätischen Linie möge dann durch die Werte der $\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0$ fixiert werden. Unsere neuen Koordinaten (die *Riemannschen Normalkoordinaten*) sollen dann durch die Formeln definiert sein:

(1) $$y_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0 \cdot \varrho\,.$$

Hiernach ist

(2) $$\varrho = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

und es stellen sich die von O auslaufenden geodätischen Linien durch je $(n-1)$ homogene lineare Gleichungen zwischen den y_i dar; wir haben ein Analogon zu den von einem festen Punkte O auslaufenden rechtwinkligen Parallelkoordinaten eines Euklidischen (oder richtiger: eines Graßmannschen) Raumes. Insbesondere ist unser Koordinatensystem der y_i nur festgelegt bis auf eine beliebig anzunehmende homogene orthogonale Substitution.

Die nächste Begriffsbildung, welche sich hier anschließt, ist die eines von O auslaufenden geodätischen Unterraums von ν Dimensionen (R_ν). Wir verstehen darunter jede Mannigfaltigkeit, die durch $(n-\nu)$ linear unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen den y_i dargestellt ist — oder auch jede Mannigfaltigkeit von Raumpunkten unseres Bereichs, die aus ν linear unabhängigen Vektoren

$$d^{(1)}y,\ d^{(2)}y,\ \ldots,\ d^{(\nu)}y$$

in der Weise erwächst, daß man

(3) $$dy_i = \lambda_1 d^{(1)}y_i + \lambda_2 d^{(2)}y_i + \cdots + \lambda_\nu d^{(\nu)}y_i$$

setzt und jeden der so entstehenden Vektoren geodätisch fortsetzt. Der früher erwähnte Fall einer von einem Punkte auslaufenden geodätischen „Fläche" ist hier für $\nu = 2$ inbegriffen.

Einfachste Beispiele solcher geodätischer R_ν erhält man, wenn man $(n-\nu)$ der Koordinaten y_i, sagen wir $y_{\nu+1}, \ldots, y_n$, gleich Null setzt. Man hat dann erstens den wichtigen Satz, daß die nicht verschwindenden Koordinaten, also $y_1, \ldots, y_\nu$ *für diesen R_ν selbst Normalkoordinaten* sind. Denn die von O auslaufenden geodätischen Linien des R_n, welche den R_ν erfüllen, sind für diesen selbst gewiß auch geodätische

Linien. Ferner aber, was ich das *Prinzip von der Beweglichkeit des Normalkoordinatensystems* nennen will: daß man nämlich jeden einzelnen R_ν, den man betrachten mag, durch geeignete Wahl des Systems der y gerade durch die Gleichungen $y_{\nu+1} = 0, \ldots, y_n = 0$ darstellen kann. Denn die orthogonale Transformation, der ich die y beliebig unterwerfen kann, enthält gewiß die hierfür erforderliche Zahl willkürlicher Parameter (die neuen y sind sogar nur bestimmt bis auf eine beliebige orthogonale Transformation, der ich die nicht verschwindenden $y_1 \cdots y_\nu$ und andererseits eine beliebige orthogonale Transformation, der ich die verschwindenden $y_{\nu+1} \cdots y_n$ unterwerfen mag).

Nach diesen Vorbemerkungen ist es leicht, die allgemeine Form anzugeben, welche das ds^2 bei Zugrundelegung der Normalkoordinaten y_i annehmen muß.

Wir betrachten zunächst den Unterraum von 2 Dimensionen, für welchen alle y_i bis auf y_1, y_2 verschwinden. Nach Formel (21), S. 153 muß für diesen Unterraum sein:

$$ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2) + \mathfrak{P}(y_1, y_2)\,(y_2\,dy_1 - y_1\,dy_2)^2, \tag{4}$$

unter $\mathfrak{P}(y_1, y_2)$ irgendeine nach ganzen positiven Potenzen der y_1, y_2 fortschreitende, in der Umgebung von O konvergente Reihe verstanden. Auf diese Form muß sich also das ds^2 unseres R_n bei Nullsetzen von $y_3 \cdots y_n$ reduzieren. — Mehr noch, ds^2 muß sich nach dem Prinzip von der Beweglichkeit des Koordinatensystems immer auf diese Form reduzieren, nachdem wir vorher die $y_1 \cdots y_n$ irgend einer homogenen linearen orthogonalen Substitution unterworfen haben und hierauf die neuen $y_3 \cdots y_n$ gleich Null setzen. Ein rein algebraischer Schluß ergibt daraus, daß das ds^2 des R_n jedenfalls die Form haben wird:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,rs}(y_1 \cdots y_n)\,(y_i\,dy_k - y_k\,dy_i)\,(y_r\,dy_s - y_s\,dy_r), \tag{5}$$

wo die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ geeignete, in der Umgebung von O konvergente Potenzreihen der beigesetzten Argumente sein werden.

Und nun ist das Schöne, daß diese Potenzreihen, sofern sie nur konvergieren, beliebig angenommen werden können. Man verifiziert dies, indem man sich überzeugt, daß bei Zugrundelegung eines ds^2 von der Form (5) die früher aufgestellten Gleichungen $\Psi_r = 0$ der geodätischen Linien erfüllt sind, wenn man entsprechend (1) die dy_i den y_i proportional setzt und die $d^2 y_i$ gleich Null setzt, daß ferner die längs einer so bestimmten geodätischen Linie von O aus gemessene geodätische Entfernung gleich $\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ wird.

Natürlich können wir die Formel (5) wieder entsprechend den zwischen den Unterdeterminanten $(y_i\,dy_k - y_k\,dy_i)$ bestehenden quadratischen Identitäten normieren, so daß also

$$\mathfrak{P}_{12,34} + \mathfrak{P}_{13,42} + \mathfrak{P}_{14,23} \equiv 0 \tag{6}$$

wird usw.

Wir wollen im folgenden immer voraussetzen, daß diese Normierung vorliege. Sie gilt dann insbesondere auch für die konstanten Anfangsglieder der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$, die wir $\alpha_{ik,rs}$ nennen.

§ 2. Beschränkung auf die nächste Umgebung von O. Die allgemeine geometrische Bedeutung des K_R.

Indem wir jetzt die Betrachtung auf die nächste Umgebung des Punktes O einschränken, ersetzen wir die Potenzreihen $\mathfrak{P}$ durch ihre Anfangsglieder und schreiben also statt (5):

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \alpha_{ik,rs}(y_i\,dy_k - y_k\,dy_i)(y_r\,dy_s - y_s\,dy_r). \tag{7}$$

Für den Punkt O selbst wird hierbei

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum dy_i^2 \\ F &= \sum p_{ik}^2 \qquad (\text{wo } p_{ik} = dy_i\,\delta y_k - dy_k\,\delta y_i). \end{aligned} \tag{8}$$

Ferner findet sich für irgend ein Büschel $\varkappa d + \lambda \delta$ von O auslaufender geodätischer Linien aus den Gleichungen $\Psi_r = 0$:

$$d^2 y_i = 0, \quad d\delta y_i = 0, \quad \delta^2 y_i = 0.$$

Das $[\Omega]$ berechnet sich danach genau so einfach, wie es für $n = 2$ S. 158 geschehen ist. Das Schlußresultat ist, daß das Riemannsche Krümmungsmaß im Punkte O den einfachen Wert annimmt:

$$K_R = -3\,\frac{\sum \alpha_{ik,rs}\,p_{ik}\,p_{rs}}{\sum p_{ik}^2}. \tag{9}$$

Es hängt also, — wie im Falle $n = 2$ — auf das Genaueste mit der Abweichung zusammen, welche das ds^2 (7) gegenüber dem Euklidischen Falle darbietet.

Im übrigen aber ergibt sich nun sofort, indem wir die Invarianteneigenschaft des Riemannschen Krümmungsmaßes erwägen, durch Betrachtung eines einzelnen Falles dessen allgemeine geometrische Bedeutung. Wir betrachten den Unterraum R_2, für den sämtliche y_i bis auf y_1, y_2 verschwinden (für dessen geodätische Linien also auch alle dy_i, δy_i mit $i > 2$ gleich Null sind). Für das zugehörige ds^2 gibt (7):

$$ds^2 = (dy_1^2 + dy_2^2) + \alpha_{12,12}(y_1\,dy_2 - y_2\,dy_1)^2, \tag{10}$$

während das zugehörige Riemannsche Krümmungsmaß nach (9) den Wert annimmt:

$$K_R = -3\,\alpha_{12,12}, \tag{11}$$

also mit dem Gaußischen Krümmungsmaß des Differentialausdrucks (10), berechnet für den Koordinatenanfangspunkt, zusammenfällt. Wir schließen sofort:

Die Büschelinvariante, welche wir das Riemannsche Krümmungsmaß nennen, ist nichts anderes als das Gaußische Krümmungsmaß derjenigen *geodätischen Fläche (Kalotte), welche aus dem Büschel der Vektoren $\varkappa d + \lambda \delta$ durch geodätische Verlängerung entsteht.*

Genau so hat Riemann es in seinem Habilitationsvortrag definiert. Indem wir (im vorigen Abschnitt) das invariante Bildungsgesetz von K_R vorweg nahmen, haben wir die Angaben, wie sie sich aus der Nebeneinanderstellung des Habilitationsvortrages und der Preisschrift ergeben, geradezu umgekehrt. Wir haben damit erreicht, daß überall auch die Beweisgründe zutage treten.

§ 3. Die geometrische Bedeutung der Ortsinvariante K.

In § 3 der vorigen Abteilung (S. 172) haben wir aus dem Riemannschen Krümmungsmaß eine einfache Richtungsinvariante:

$$\sum K_{ik}\, d x_i\, d x_k : \sum a_{ik}\, d x_i\, d x_k$$

und eine ebensolche Ortsinvariante K abgeleitet. Indem wir ihre Definitionen entsprechend (7) für den Anfangspunkt O in Normalkoordinaten anschreiben, erhalten wir ohne weiteres die schönen Deutungen derselben, wie sie Herglotz neuerdings (im Dezemberheft der Leipziger Berichte von 1916) abgeleitet hat.

Beginnen wir mit K. Da vermöge (5) in O alle a_{ii} den Wert 1, alle anderen a_{ik} den Wert 0 haben, wird nach Formel (24) (S. 72) für den Punkt O:

$$K = -\frac{3\sum \alpha_{ik,\,ik}}{n(n-1):2}. \tag{12}$$

Nun ist $\frac{n(n-1)}{2}$ gerade die Zahl der Büschel (i, k), welche dem „n-Bein" der $y_1 \dots y_n$ als „Verbindungswände zwischen den Beinen" eingelagert sind, $-3\,\alpha_{ik,ik}$ aber ist das dem einzelnen Büschel zugehörige Gaußische Krümmungsmaß. Wir werden daher sagen: K ist der Mittelwert aller dieser Gaußischen Krümmungsmaße. Dabei ist K seinem Wesen nach von der Auswahl des von O auslaufenden n-Beins der $y_1 \dots y_n$ unabhängig. Wir werden in diesem Sinne K geradezu als *mittleres Gaußisches Krümmungsmaß für den Punkt O* bezeichnen können[1]). Dies ist das erste Herglotzsche Resultat, das wir nun noch durch eine Nebenbetrachtung ergänzen:

In der Interpretation des K liegt, daß $\sum \alpha_{ik,\,ik}$ bei beliebiger orthogonaler Substitution der y invariant sein muß. Dies ist auch algebraisch ohne weiteres klar. Denn bei einer orthogonalen Substitution der y geht auch $\sum p_{ik}^2$ in sich über, d. h. auch die p_{ik} erfahren eine (natürlich spezielle) orthogonale Substitution, bei der sich dann $\sum \alpha_{ik,\,ik}$ als niederste Invariante der quadratischen Form $\sum \alpha_{ik,\,rs}\, p_{ik}\, p_{rs}$ dar-

---

[1]) Dieser Begriff hat natürlich nichts mit dem in der Flächentheorie üblichen Begriff „mittlere Krümmung" zu tun.

bietet. Im übrigen sind die in Rede stehenden linearen Substitutionen der p_{ik} so beschaffen, daß bei ihnen die Gesamtheit der Gleichungen $P=0$ ungeändert bestehen bleibt, die Ausdrücke P also sich linear kombinieren. Zieht man die partiellen Differentialgleichungen heran, denen alle Invarianten genügen müssen, die bei orthogonaler Substitution der y ungeändert bleiben, so beweist man geradezu, daß bei „normierten" $\alpha_{ik,rs}$ (für welche die linearen Relationen bestehen, die den Gleichungen $P=0$ parallel laufen, S. 179 oben) die $\sum \alpha_{ik,ik}$ sogar die einzige in den $\alpha_{ik,rs}$ lineare Invariante der quadratischen Form $\sum \alpha_{ik,rs} p_{ik} p_{rs}$ ist. Hiervon werden wir sofort Gebrauch machen, indem wir eine neue Deutung von K durch Heranziehen von Inhalt oder Oberfläche einer kleinen um O herum gelegten Kugel suchen. Eine solche Deutung liegt nach dem, was wir auf S. 155 für $n=2$ ausführten, nahe und ist mir schon vor längerer Zeit von Runge vorgeschlagen worden. Inzwischen hat Vermeil auf meinen Wunsch die hierfür erforderlichen Rechnungen gemacht[1]), die ich folgendermaßen resumiere:

a) Man führe statt der $y_1 \ldots y_n$ Polarkoordinaten nach dem Schema ein, das ich der Kürze halber hier nur für $n=4$ hersetze:

(13) $$y_1 = \varrho \cos\vartheta, \quad y_2 = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y_3 = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \cos\psi, \quad y_4 = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \sin\psi.$$

b) Man überzeugt sich dann leicht, daß das Volumen einer sehr kleinen geodätischen Kugel (bei dessen Berechnung wir die abgekürzte Form (7) des ds^2 zugrunde legen dürfen) mit dem Volumen J einer Euklidischen Kugel von demselben Radius durch eine Formel folgender Art zusammenhängt:

(14) $$V = J + (\text{homogene lin. Funktion der } \alpha_{ik,rs}) \cdot \varrho^2 J.$$

c) Nun gibt unser invariantentheoretischer Satz ohne weiteres, daß die hier auftretende lineare Funktion nur ein Multiplum von $\sum \alpha_{ik,ik}$ sein kann; es bleibt die Aufgabe, dieses Multiplum zu bestimmen, was durch Heranziehen eines möglichst einfachen Ausdrucks für die Inhaltsformel geschehen kann.

d) Indem ich die Ausführungen im einzelnen übergehe, setze ich hier nur das Endresultat her:

(15) $$V = J + \frac{\sum \alpha_{ik,ik}}{2(n+2)} \cdot \varrho^2 J = J - \frac{n(n-1)}{6(n+2)} K \cdot \varrho^2 J.$$

e) Wir haben hieraus als neue Interpretation des K:

(16) $$K = -\frac{6(n+2)}{n(n-1)} \lim_{\varrho=0} \left(\frac{V-J}{\varrho^2 J}\right)$$

(was mit der früheren Formel für $n=2$ — (27) S. 155 — übereinstimmt).

f) Will man statt des Kugelinhalts die Oberfläche setzen, so braucht

[1]) Gött. Nachr., letztes Heft 1917.

man diese nur als nach ϱ genommenen Differentialquotienten des Inhalts einzuführen. So kommt heraus (unter F die Oberfläche der Euklidischen Kugel verstanden):

$$K = -\frac{n}{n(n-1)} \lim_{\varrho=0} \left(\frac{O-F}{\varrho^2 F}\right) \tag{17}$$

g) Ich bemerke noch der Vollständigkeit wegen, daß J bekanntermaßen[1]) durch folgende Formeln gegeben ist:

$$\begin{aligned} &1.\ \text{für gerades } n\ (n = 2\nu): && J = \frac{\pi^\nu \varrho^n}{1\cdot 2 \cdots \nu}, \\ &2.\ \text{für ungerades } n\ (n = 2\nu+1): && J = \frac{\pi^\nu \varrho^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Im übrigen ist es weiterhin zweckmäßig, das nun auf verschiedene Weisen interpretierte K, der Dimensionszahl des zugrunde gelegten Raumes entsprechend, mit $K^{(n)}$ zu bezeichnen. Es ist ohne weiteres klar, was man analog, im Punkte O, unter dem mittleren Gaußischen Krümmungsmaß $K^{(n-1)}$ eines durch O hindurchgehenden geodätischen Unterraumes R_{n-1} zu verstehen hat. Hiervon werden wir sofort Gebrauch machen.

Ich bemerke noch der Deutlichkeit halber, daß $K^{(1)}$ schlechtweg 0 ist. Denn für $n = 1$ werden V und J beide gleich 2ϱ.

§ 4. Die geometrische Bedeutung der einfachsten Richtungsinvariante. Übergang zur mittleren Krümmung $K^{(n-1)}$.

Wir berechnen jetzt aus (7) für den Punkt O den Wert unserer einfachsten Richtungsinvariante und finden:

$$\frac{\sum K^{(n)}_{ik}\, dx_i\, dx_k}{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k} = -3\, \frac{dy_1^2\, (\alpha_{12,12} + \cdots \alpha_{1n,1n}) + 2\, dy_1\, dy_2\, (\alpha_{13,23} + \cdots \alpha_{1n,2n}) + \cdots}{(n-1) \sum dy_i^2}. * \tag{19}$$

Nach dem Prinzip von der Beweglichkeit des Normalkoordinatensystems genügt es, die geometrische Interpretation für eine einzelne Richtung dy zu geben und das Resultat dann allgemein aufzufassen. Wir setzen etwa alle dy_i bis auf dy_1 gleich Null und erhalten für die rechte Seite von (19):

$$-3\, \frac{\alpha_{12,12} + \cdots + \alpha_{1n,1n}}{(n-1)} \tag{20}$$

Wieder ist es ein Mittelwert Gaußischer Krümmungsmaße, nämlich

[1]) Vgl. z. B. Schoute: Mehrdimensionale Geometrie. Bd. 2, S. 288. Leipzig 1905, Samml. Schubert.

derjenigen, die sich auf irgend $(n-1)$ zueinander orthogonal durch den Vektor $dy_1 \ldots dy_n$ hindurchgelegten Büschel beziehen.

Dies ist Herglotz' zweites Resultat, das wir nun noch, ebenfalls nach Herglotz, einer einfachen Umformung unterziehen. Wir ersetzen die Summe $\alpha_{12,12} + \cdots + \alpha_{1n,1n}$ durch folgende Differenz:

$$\sum_{i,k=1\ldots n} \alpha_{ik,ik} - \sum_{i,k=2\ldots n} \alpha_{ik,ik}. \tag{21}$$

Dadurch verwandelt sich (20) in

$$\frac{n}{2} K^{(n)} - \frac{n-2}{2} K^{(n-1)}, \tag{22}$$

unter $K^{(n-1)}$ das mittlere Gaußische Krümmungsmaß desjenigen $R^{(n-1)}$ verstanden, das durch $y_1 = 0$ gegeben ist. Eine entsprechende Formel wird bei sinngemäßer Deutung für jede Richtung $dy_1 \ldots dy_n$ bestehen. Indem wir zu allgemeinen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ wieder zurückkehren, sprechen wir das Resultat gleich so aus:

Versteht man unter $K^{(n-1)}$ das mittlere Gaußische Krümmungsmaß desjenigen R_{n-1}, das auf der Richtung der $dx_1, \ldots, dx_n$ im Sinne unserer Maßbestimmung senkrecht steht, so haben wir:

$$\frac{\sum K_{ik}^{(n)}\, dx_i\, dx_k}{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k} = \frac{n}{2} K^{(n)} - \frac{n-1}{2} K^{(n-1)}. \tag{23}$$

Indem wir nach $K^{(n-1)}$ auflösen, haben wir:

$$K^{(n-1)} = \frac{n\, K^{(n)} \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k - 2 \sum K_{ik}^{(n)}\, dx_i\, dx_k}{(n-2)\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k}. \tag{24}$$

Also unser $K^{(n-1)}$ selbst ist ebenfalls eine Richtungsinvariante.

Wir wollen im Hinblick auf spätere Entwicklungen (wieder Herglotz folgend)

$$K^{(n-1)} = \frac{\sum G_{ik}\, dx_i\, dx_k}{\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k} \tag{25}$$

setzen, um damit anzudeuten, daß der Tensor G_{ik} für $n = 4$ in der Einsteinschen Gravitationstheorie eine wichtige Rolle spielt. Dabei sei gleich bemerkt, daß bei Einstein selbst nur der Tensor K_{ik} auftritt und der Tensor G_{ik} seine prinzipielle Stellung erst durch Hilberts Untersuchungen bekommen hat. Inzwischen wolle man alle diese Zitate nur cum grano salis verstehen, nämlich bis auf Zahlenfaktoren und Vorzeichen, welche bei unserer Darstellung durchaus eindeutig herauskommen, während die anderen Autoren über sie aus irgendwelchen bei ihnen vorliegenden Bequemlichkeitsrücksichten verfügt haben.

Noch eines muß erwähnt werden. Das der Annahme $n = 4$ entsprechende ds^2, welches der Einsteinschen Theorie zugrunde liegt, hat zwar (als Form der dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) eine nicht verschwindende Determinante, ist aber indefinit: es entspricht, um es genauer zu sagen, im Sinne des Trägheitsgesetzes der Vorzeichenkombination $+ + + -$

(vgl. das im vorigen Kapitel immer betrachtete, mit der Lorentzgruppe zusammenhängende: $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$). Dies hindert nicht, daß wir von zugehörigen Normalkoordinaten und Mittelwerten sprechen; es ist nur immer dem einen abweichenden Vorzeichen Rechnung zu tragen. Dagegen fällt die Vermeilsche Integration über eine unendlich kleine Kugel weg, denn $ds^2 = \text{const}$ bedeutet jetzt eine hyperboloidartige Mannigfaltigkeit, die sich entlang $ds^2 = 0$ ins Unendliche zieht.

§ 5. Das Äquivalenzproblem in Räumen verschwindenden, bzw. konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes.

Nach Analogie mit dem, was wir für $n = 2$ entwickelten, sollten jetzt einige Angaben über das Äquivalenzproblem zweier ds^2 (mit n Variablen) folgen. Aber wir müssen diese Erörterungen noch hinausschieben, weil uns bestimmte Hilfsbegriffe, die erst weiter unten erörtert werden können, noch nicht zur Verfügung stehen. Ebensowenig können hier schon allgemeinere Angaben über diejenigen ds^2 gemacht werden, welche durch kontinuierliche Scharen von Transformationen (die sich dann als Gruppen mit endlicher Parameterzahl erweisen) in sich übergehen. Nur von den Fällen, wo das Riemannsche Krümmungsmaß entweder identisch verschwindet oder (unabhängig von den p_{ik} und den $x_1 \ldots x_n$) einen konstanten Wert hat, soll hier die Rede sein.

Beispiele für derartige Fälle sind unmittelbar zur Hand:

1. *Der „Euklidische" Raum von n Dimensionen*, wo das ds^2, in Normalkoordinaten geschrieben, die einfache Form annimmt

$$ds^2 = \sum dy_i^2 , \tag{26}$$

die ferneren Glieder der Formel (5) aber wegfallen, so daß das Riemannsche Krümmungsmaß gewiß identisch verschwindet. Das vorstehende ds^2 bleibt nicht nur bei orthogonalen Substitutionen der y_i, sondern auch bei Vermehrung der y_i um beliebige Konstanten c_i ungeändert, was zusammen eine Gruppe von $\frac{n(n+1)}{2}$ Parametern ergibt: die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen. Ferner:

2. *Die innere Geometrie der im Euklidischen Raume von* $(n+1)$ *Dimensionen gelegenen n-dimensionalen Kugel.* — Man denke sich in dem genannten Raume ein System gewöhnlicher, zueinander rechtwinkliger Parallelkoordinaten

$$z, z_1, z_2, \ldots, z_n$$

eingeführt. Wir haben dann als Gleichung einer um O herumgelegten Kugel

$$z^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = a^2 , \tag{27}$$

und die inneren Maßverhältnisse dieser Kugel werden gewiß bei der $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ der (homogenen, linearen) orthogonalen Substitutionen der $z, z_1, \ldots, z_n$ nicht geändert. Nunmehr wolle man (27) dadurch identisch befriedigen, daß man die $z, z_1, \ldots, z_n$ irgendwie als Funktionen von n unabhängigen Parametern $x_1 \ldots x_n$ anschreibt. Das ds^2 des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, $ds^2 = dz^2 + dz_1^2 + \ldots + dz_n^2$, verwandelt sich dann in eine quadratische Form mit nur n Differentialen

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{28}$$

welche durch eine Gruppe von Transformationen mit $\frac{n(n+1)}{2}$ Parametern in sich übergeführt wird. Diese Transformationen werden gestatten, jeden Punkt (x) in dem Raumstück der x, innerhalb dessen die z eindeutige Funktionen der x sein mögen, in jeden anderen und jedes von einem Punkte (x) auslaufende Büschel $\varkappa d + \lambda \delta$ in jedes andere derartige Büschel zu verwandeln. Daher erhält das Riemannsche Krümmungsmaß von (28) notwendigerweise in *konstanten* Wert.

Am einfachsten scheint es, als Parameter $x_1 \ldots x_n$ in gewöhnlicher Weise Polarkoordinaten einzuführen, also etwa nach dem Schema, das ich hier der Kürze halber nur für $n = 3$ hersetze (vgl. [13] S. 181):

$$z = a\cos\vartheta, \quad z_1 = a\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z_2 = a\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi, \tag{29}$$
$$z_3 = a\sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi.$$

Unser ds^2 (28) nimmt dann folgende Form an:

$$ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + a^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\, d\psi^2. \tag{30}$$

Wir werden nun zu Riemannschen Normalkoordinaten übergehen, indem wir setzen

$$\varrho = a\vartheta, \quad y_1 = \varrho\cos\varphi, \quad y_2 = \varrho\sin\varphi\cos\psi, \quad y_3 = \varrho\sin\varphi\sin\psi, \tag{31}$$

wo ϱ, wie es sein muß $= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ wird. Man berechnet sofort:

$$d\varrho^2 = \sum dy_i^2 - \frac{\sum (y_i\, dy_k - y_k\, dy_i)^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \tag{32}$$

$$ds^2 = d\varrho^2 + a^2\left(\sin\frac{\varrho}{a}\right)^2 \frac{\sum (y_i\, dy_k - y_k\, dy_i)^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2}. \tag{33}$$

Hier ist bei O nicht etwa eine Unstetigkeit vorhanden, vielmehr entwickelt sich das ds^2 nach ganzen positiven Potenzen der y_i in eine Reihe, deren Anfangsterme so lauten:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 - \frac{1}{3a^2}\sum (y_i\, dy_k - y_k\, dy_i)^2. \tag{34}$$

Man erkennt: *Das Riemannsche Krümmungsmaß hat für den Punkt O, unabhängig von der Auswahl des Büschels $\varkappa d + \lambda\delta$ und damit, wegen* *der* $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$, *für jeden anderen Punkt* (y) *und jedes andere Büschel den Wert:*

$$K_R = \frac{1}{a^2}. \tag{35}$$

Die geometrische Einkleidung der Überlegung betrifft dabei nur die Form der Darlegung; das Resultat (35) muß sich aus den Formeln (32), (33), auch was die Gleichberechtigung eines beliebigen Punktes (y) mit dem Punkte O angeht, rein rechnerisch ergeben. Wir schließen daraus, daß wir eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung vor uns haben, auch wenn das in (35) definierte K_R negativ, also der Radius der Ausgangskugel rein imaginär sein sollte.

Damit haben wir nun, wenn anders wir mit dem Bogenelement beginnen wollen, in (32), (33) den Ausgangspunkt zur Behandlung der Raumformen konstanter Krümmung, wie sie in der Nichteuklidischen Geometrie unterschieden werden. Der Fall verschwindender Krümmung ordnet sich als Übergangsfall ein, indem man a unendlich groß werden läßt. Im übrigen kommen, wie wir schon bei $n = 2$ andeuteten, wenn wir den Gesamtverlauf der Räume betrachten wollen, noch weitere Unterscheidungen hinzu, die man am besten faßt, wenn man nicht vom Infinitesimalen beginnt, sondern die Allgemeinauffassungen der projektiven Geometrie voranstellt [1]).

Mit den vorstehenden Entwicklungen haben wir nur die eine leichtere Hälfte der Angaben, welche Riemann in seinem Habilitationsvortrag gemacht hat, erledigt. Nicht daß (26) und (32), (33) zu $K_R = 0$ bzw. $K_R = \frac{1}{a^2}$ führen, sondern daß umgekehrt die Annahme $K_R = 0$ bzw. $K_R = \frac{1}{a^2}$ mit Notwendigkeit zu den hingeschriebenen Formen des ds^2 führen, ist die Hauptsache. Riemann hat sich mit einer bloßen Andeutung seines Gedankenganges und einer Angabe der Tatsache begnügt. Einen ersten, noch recht umständlichen Beweis gibt Lipschitz in Crelle 70, 72 (1869, 70). Einfacher sind die Erläuterungen, welche Weber diesbezüglich der Riemannschen Preisarbeit in der 2. Auflage von Riemanns Werken hinzugefügt hat (1892). Einen Beweis von Christoffels allgemeinen Untersuchungen betr. die Äquivalenz zweier quadratischer Differentialformen aus gibt Bianchi in (5), VII 2 der Rendiconti dell' Academia dei Lincei (1897). Ich werde hier den Beweis eines allgemeineren, ganz elementaren Satzes skizzieren, den ich mit Frl. Noether und Herrn Vermeil überlegt habe. Aus ihm folgen die Sätze betr. $K_R = 0$ und $K_R = \frac{1}{a^2}$ als bloße Korollare.

---

[1]) Es wird dies nur deshalb wiederholt vermerkt, weil verbreitete Lehrbücher der Nichteuklidischen Geometrie in dieser Hinsicht versagen (z. B. Bianchi-Lukat, Bonola-Liebmann usw.).

Wir haben bei Zugrundelegung von Normalkoordinaten nach (5), S. 178

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,rs}(y_i dy_k - y_k dy_i)(y_r dy_s - y_s dy_r),$$

wo wir für die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ irgendwelche noch positiven Potenzen der y fortschreitende Reihen nehmen dürfen (die nur der Bedingung unterliegen werden, für hinreichend kleine Werte der y zu konvergieren). Andererseits berechnen wir uns die Koeffizienten (ik, rs) der Krümmungs-Form $[\Omega]$

$$[\Omega] = \sum (ik,rs)(\delta y_i dy_k - \delta y_k dy_i)(\delta y_r dy_s - \delta y_s dy_r)$$

nach (37), S. 174 ebenfalls als solche Potenzreihen. Nun können wir die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ noch mannigfach modifizieren, ohne an dem ds^2 irgend etwas abzuändern. Hierzu dienen einmal die Identitäten, die zwischen den p_{ik}, p_{rs} mit verschiedenen Indizes bestehen

$$p_{ik}\, p_{rs} + p_{ir}\, p_{sk} + p_{is}\, p_{kr} = 0;$$

wir hatten sie schon früher in Betracht gezogen, als wir nur von den konstanten Gliedern der $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ handelten. Ferner aber die noch einfacheren Beziehungen mit 3 Indizes:

$$y_i\, p_{kr} + y_k\, p_{ri} + y_r\, p_{ik} = 0.$$

Man wird diese Identitäten benutzen können, um die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ in bestimmter, hier nicht auszuführender Weise zu normieren. Endlich kommt in Betracht, daß die Reihenglieder, welche bei der Entwicklung der (ik, rs) auftreten, eo ipso eine große Zahl linearer Beziehungen darbieten, die genau den Beziehungen zwischen den Koeffizienten der normierten $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ entsprechen.

Aus dem Bildungsgesetz von $[\Omega]$ folgt dann das Theorem, um welches es sich hier handelt, *daß nämlich die einzelnen Reihenglieder der normierten $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ aus den Reihengliedern der (ik, rs) eindeutig berechnet werden können.* Man hat für die aufeinanderfolgenden Glieder eine ganze Reihe von Formeln, deren niederste durch die Formel (9) S. 179 gegeben sind, wenn wir sie so schreiben:

(36) $$a_{ik,rs} = \frac{1}{6}(ik, rs)_{0,0,\ldots,0}.$$

Insbesondere folgt, daß die normierten $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ sämtlich verschwinden, wenn $K_R = 0$ angenommen wird, und daß sie gerade die Werte (32), (33) annehmen, wenn man $K_R = \frac{1}{a^2}$ setzt.

Man darf vermuten, daß durch die so skizzierten einfachen Überlegungen gerade der Gedankengang reproduziert wird, den Riemann bei seinem Habilitationsvortrage vor Augen hatte. Heißt es doch da kurz (S. 282 der Werke, 2. Aufl.), daß durch das Krümmungsmaß die Maßverhältnisse der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt seien: Auch die Reihenfolge der sonstigen Entwicklungen dort läuft mit der hier eingehaltenen parallel. Insbesondere wird verständlich, wenn er betreffend die Mannigfaltigkeiten konstanten Krümmungsmaßes l. c. fortfahrend sagt: „es sind daher um einen Punkt nach allen Richtungen die Maßverhältnisse genau dieselben, wie um einen anderen, und also um ihn dieselben Konstruktionen ausführbar, und folglich kann in den Mannigfaltigkeiten mit konstantem Krümmungsmaß den Figuren jede beliebige Lage gegeben werden.“ – Um die Existenz einer $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$, welche die Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung in sich transformiert, von vornherein verständlich zu machen, hatten wir zu Anfang des Paragraphen an die Betrachtung einer n-dimensionalen Kugel des $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raumes angeknüpft. Dies hat nach der zitierten Angabe Riemanns natürlich nur pädagogischen Wert, die Existenz der Automorphien ergibt sich von selbst, ohne daß man aus der „inneren“ Geometrie des R_n heraustritt. Übrigens aber hat Riemann sicher auch an das Kugelbeispiel gedacht. Denn die Form des Bogenelementes konstanter Krümmung, welches er l. c. des weiteren angibt

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{K}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2} \tag{37}$$

ergibt sich sofort, wenn man die Beziehung zwischen der Kugel und dem Euklidischen Raum der x durch gewöhnliche stereographische Projektion herstellt.

E. Einiges von der Weiterentwicklung über Riemann hinaus.

§ 1. Charakterisierung der um 1870 hervortretenden Persönlichkeiten und ihres nachwirkenden Einflusses.

Wir haben im Vorhergehenden schon verschiedentlich auf die Arbeiten von Beltrami, Christoffel und Lipschitz hingewiesen, auch mancherlei von der ausgeprägten formentheoretischen Auffassung, die die reifste Frucht der Lipschitzschen Arbeiten ist, zur Geltung gebracht. Indem wir jetzt unternehmen, darüber ausführlicher zu berichten, müssen wir zunächst von der Art ihrer Persönlichkeiten und von den Bedingungen, unter denen sie gewirkt haben, einiges sagen.

Beltrami geht ursprünglich von der Flächentheorie aus und wendet sich später, von 1869 an, wesentlich zur mathematischen Physik. Indem er unternimmt, auch hier die allgemeine Theorie der quadratischen

Differentialformen zur Geltung zu bringen, bevorzugt er bei der Entwicklung der Theorie diejenigen Fragestellungen und Methoden, welche in Physik und Mechanik ihre Entwicklung gefunden haben. Daher überall die Voranstellung der Variationsprinzipe und der Integralsätze, worüber wir noch genauer zu berichten haben werden.

Auch bei Lipschitz spielt die Beziehung zur Mechanik und Variationsrechnung eine große Rolle. Er setzt die ganze Entwicklung, welche diese Disziplinen über Lagrange hinaus durch Jacobi gefunden haben, fortgesetzt als bekannt voraus. Hierin mag einer der Gründe liegen, weshalb seine Arbeiten von seiten der Geometer und Algebraiker bis in die neueste Zeit nur teilweise Beachtung gefunden haben. Da scheint Christoffel bequemer, der nur algebraische Umformungen und Differentiationen benutzt. Aber es kommt noch ein weiteres dazu. Lipschitz ist zwar ein sehr pflichttreuer, aber kein anregender Lehrer gewesen, was Christoffel im höchsten Grade war; 1869 von der Berliner Gewerbeschule an das Züricher Polytechnikum berufen, hat er an beiden Orten dauernde Anregungen zur Weiterarbeit auf dem von ihm betretenen Gebiet hinterlassen. In Berlin lebt sein Andenken bis auf den heutigen Tag in der flächentheoretischen Schule nach, deren Haupt einst Weingarten gewesen ist. Von Zürich aus aber erstreckte sich sein Einfluß auf Italien, wo sich Bianchi an ihn anschloß und seine Gedanken durch Ricci eine sympathische Weiterbildung gefunden haben. Ricci hat für die Invariantentheorie der quadratischen Differentialformen einen besonderen Kalkül entwickelt, welchen er den „*Calcolo differenziale assoluto*" nannte; man findet eine ausgearbeitete Darstellung desselben mit zahlreichen Anwendungen auf die verschiedensten Fragen der Geometrie, Mechanik und Physik insbesondere in einer von ihm zusammen mit Levi-Civita verfaßten Abhandlung in Bd. 54 der Mathematischen Annalen (1900/01). Ricci verwirft die Ansätze seines Landsmannes Beltrami, die in der Tat nur besondere Invarianten liefern (s. u.), ausdrücklich als „troppo artificiosi".

Die Christoffel-Riccische Darstellung hat weithin Verbreitung gefunden. In der Monographie von Edmund Wright, „Invariants of a quadratic form" (Cambridge tracts, 1908) nimmt sie den Ehrenplatz ein (während von Riemann nur beiläufig und von Lipschitz gar nicht die Rede ist). Ebenso ist z. B. Einstein in der Christoffel-Riccischen Tradition aufgewachsen.

Wir haben diese Verhältnisse hier zur Sprache gebracht, weil ihre Kenntnis für ein wirkliches Verständnis der einschlägigen Literatur unerläßlich scheint. Trotz aller Jahresberichte und Enzyklopädien, trotz aller durch Kongresse ermöglichten persönlichen Bezugnahme zwischen den Mathematikern behauptet bei der Weiterführung der mathematischen Forschung die zufällige Tradition und die Schulbildung ihren Einfluß.

§ 2. Invariantenbildung bei Beltrami.

Die Methode der Variationsrechnung.

Es ist ein altes Problem der mathematischen Physik, den Ausdruck $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (den Lamé den „zweiten Differentialparameter" von u nannte) in beliebige krummlinige Koordinaten umzurechnen. Den einfachsten Ansatz dazu hat (in Verallgemeinerung Lagrangescher Methoden) Jacobi in Crelles Journal Bd. 36 (1848) gegeben (Über eine partikuläre Lösung der Gleichung $\Delta_2 u = 0$; Werke II, S. 193 ff.). Man berechne in den neuen Koordinaten zunächst $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ und daraus den „ersten" Differentialparameter $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$. Zu der gesuchten Formel für Δ_2 kommt man dann durch die Bemerkung, daß

$$\iiint \Delta_1 u \, dx\, dy\, dz\,, \tag{1}$$

erstreckt über irgend ein vorgegebenes Raumstück, eine Integralinvariante dieses Raumstücks ist, und daß dementsprechend auch die bei Festhaltung der Begrenzung gebildete Variation

$$\delta \overline{\underline{\iiint}} \Delta_1 u \, dx\, dy\, dz = -2 \overline{\underline{\iiint}} \Delta_2 u \, \delta u \, dx\, dy\, dz \tag{2}$$

eine invariante Bedeutung haben muß.

Diesen Ansatz hat nun Beltrami 1868 (sulla theoria generale dei parametri differenziali, Memorie di Bologna (2) VIII = Werke I) auf n Variable und ein beliebig vorgelegtes Bogenelement $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ übertragen. Wir bezeichnen, wie früher, die Determinante von ds^2 mit a, die Koeffizienten der reziproken Form mit a^{ik}. Der „erste Differentialparameter" einer Funktion u wird dann sein:

$$\Delta_1 u = \sum a^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}\,. \tag{3}$$

An Stelle des Integrals (1) aber tritt:

$$\iint \cdots \int \Delta_1 u \sqrt{a}\, dx_1 \ldots dx_n\,, \tag{4}$$

erstreckt über irgend ein n-dimensionales Raumstück. Den „zweiten Differentialparameter" $\Delta_2 u$ werden wir nun in der Weise definieren, daß wir die bei Festhaltung der Integrationsgrenzen gebildete Variation:

$$\delta \overline{\underline{\iint \cdots \int}} \Delta_1 u \sqrt{a}\, dx_1 \ldots dy_n = -2 \overline{\underline{\iint \cdots \int}} \Delta_2 u \, \delta u \sqrt{a}\, dx_1 \ldots dx_n \tag{5}$$

setzen. Hier wird nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial \left(\sqrt{a} \sum_k a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}{\partial x_i} \tag{6}$$

und ist, weil nur mit invarianten Größenverbindungen gerechnet wird, eo ipso eine Invariante.

Die hiermit erläuterte Methode der Invariantenbildung wird im folgenden noch mehrmals zur Geltung gelangen.

Wir wollen dabei von vornherein hervorheben, daß die Irrationalität $\sqrt{a}$ in $\Delta_2 u$ nur scheinbar auftritt, daß sie sich vielmehr bei Ausführung der in (6) angedeuteten Differentiationen von selbst weghebt. — Im übrigen kann man, wie dies Beltrami auch ausführt, die Invarianz von (6) gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen natürlich durch direkte Umrechnung des Differentialquotienten bestätigen: Es müßte geradezu möglich sein, die charakteristische Umsetzung, welche die Variationsrechnung beim Übergang von (5) zu (6) durch partielle Integration bewerkstelligt, durch eine algebraische Identität zu ersetzen. So haben wir es auf S. 142 oben für das bei einem System einzelner Massenpunkte auftretende Integral der kleinsten Wirkung vermöge Übergangs zur Lagrangeschen „Zentralgleichung" gemacht. Indes scheint dies für mehrfache Integrale, wie wir sie hier und in der Folge vor uns haben, noch nicht ausgeführt zu sein.

Die Methode der Integralbeziehungen.

Eine Verallgemeinerung der gerade gelösten Aufgabe, den zweiten Differentialparameter einer skalaren Funktion u zu berechnen, ist die, für ein irgendwie gegebenes Vektorfeld des n-dimensionalen Raumes die Divergenz aufzustellen. Wir müssen jetzt nur, im Gegensatz zum vorigen Kapitel, wo wir ausschließlich mit orthogonalen Koordinaten operierten, festsetzen, ob unsere Vektorkomponenten zu den $d x_i$ kogredient oder kontragredient sein sollen. Die Komponenten $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ des zunächst erledigten speziellen Falles sind kontragredient, also mögen wir auch im allgemeinen Falle zunächst kontragrediente Komponenten annehmen, die wir

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \tag{7}$$

nennen wollen. Das erste ist dann freilich, daß wir uns aus ihnen kogrediente Komponenten verschaffen, indem wir etwa

$$\xi_i = \sum a^{ik} u_k \tag{7'}$$

setzen. Im übrigen können wir etwa so vorgehen: Wir bilden uns unter Benutzung Graßmannscher Determinanten die Invariante:

$$d\omega = \sqrt{a} \begin{vmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ d^{(1)} x_1 & \cdots & d^{(1)} x_n \\ & & \\ d^{(n-1)} x_1 & \cdots & d^{(n-1)} x_n \end{vmatrix} \tag{8}$$

(wo die $d^{(1)} \ldots d^{(n-1)}$ die Symbole von irgend $(n-1)$ kogredienten

Differentialien sein werden). Hieraus wieder die über irgend eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit erstreckte Integralvariante:

$$\int\int\cdots\int d\omega\,. \tag{9}$$

Diese Mannigfaltigkeit wähle man nun insbesondere geschlossen, in der Weise, daß sie ein bestimmtes n-dimensionales Raumstück umgrenzt. Dann können wir (9) in ein n-faches über dieses Raumstück erstrecktes Integral umsetzen, das bei üblicher Schreibweise des Raumdifferentials folgende Gestalt hat:

$$\int\int\cdots\int\left(\frac{\partial\sqrt{a}\,\xi_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\sqrt{a}\,\xi_n}{\partial x_n}\right)dx_1\,dx_2\cdots dx_n\,. \tag{10}$$

Indem wir im Nenner und Zähler noch $\sqrt{a}$ als Faktor hinzusetzen, erkennen wir, daß

$$\frac{\dfrac{\partial\sqrt{a}\,\xi_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial\sqrt{a}\,\xi_4}{\partial x_4}}{\sqrt{a}} \tag{11}$$

eine Ortsinvariante ist. *Sie wird allgemein die Divergenz unseres Vektorfeldes* (7) *bedeuten, weil sie es im Falle rechtwinkliger Parallelkoordinaten tut.*

Auch diese ganze Umrechnung ist, soviel ich sehen kann, zuerst von Beltrami gegeben, freilich nur im speziellen Falle $n = 3$ in einer daran angepaßten geometrischen Begründung. Man sehe seine „Ricerche sulla cinematica dei fluidi", Teil I (Memoria di Bologna (3), I, 1871 = Werke II).

§ 3. Lipschitz und Christoffel: Invariantenbildung durch Differentiation und Elimination, insbesondere durch „kontragrediente Differentiation".

Die im vorigen Paragraphen besprochenen Methoden der Invariantenbildung mag man insofern als „transzendent" bezeichnen, als bei ihrer Entwicklung nicht nur Differentiationen sondern auch Integrationen benutzt werden. Demgegenüber kehren wir jetzt zu dem elementaren Ansatz zurück, der uns schon im Abschnitt C zu der fundamentalen Invariante $[\Omega]$ (der Riemannschen Krümmungsform) führte und dessen Grundgedanken wir etwa so formulieren können:

„Es möge sich um Bildung von Invarianten handeln, welche, wenn überhaupt, nur erste Differentiale der x_i enthalten. Hat man in J eine erste solche Invariante, so sind natürlich δJ oder $\delta\delta J, \ldots$ oder irgendwelche Verbindungen solcher Ausdrücke, selbst wieder Invarianten. Enthält dann diese Verbindung keine höheren Differentiale der x_i als zweite, so wird man diese durch Subtraktion geeigneter Aggregate der in der Theorie der geodätischen Linien auftretenden Invarianten beseitigen können, wodurch man dann wieder eine Invariante mit nur ersten Differentialien hat."

So wurde das Verfahren von Lipschitz in Crelle 72, S. 16—17 (1870) dargelegt und in erster Linie zu einer möglichst direkten Berechnung einer quadrilinearen Invariante $\Psi(d'_x, \delta'_x, d_x, \delta_x)$ angewandt, aus der unser $[\Omega]$ entsteht, wenn man $d'_x = d_x, \delta'_x = \delta_x$ setzt. Lipschitz fährt dann fort: „Auf demselben Grunde ruht die Methode des Herrn Christoffel (Crelle 70, S. 57, 1869), um aus einer mit $f(x)$ kovarianten mehrfach linearen Form:

$$F(d^{(1)}x,\ d^{(2)}x,\ \cdots,\ d^{(n)}x)$$

eine von gleicher Eigenschaft abzuleiten, bei der die Zahl der Systeme von Differentialen um Eins größer ist."

Diese Methode soll hier dargelegt werden, weil sie für Christoffels eigene Entwicklungen, wie die ganze an ihn anschließende Literatur grundlegend ist. Insbesondere wurde sie von Ricci in seinem Calcolo assoluto in den Vordergrund gerückt und als „*kovariante*" Differentiation bezeichnet; wir selbst werden, entsprechend dem von uns festgehaltenen Sprachgebrauch, lieber kontragrediente Differentation sagen[1]).

Wir beginnen mit dem einfachsten Beispiele. Sei ein Pfaffscher Ausdruck

$$\sum_i u_i\, dx_i \tag{12}$$

(d. h. ein kontragredientes Vektorfeld $u_1 \ldots u_n$) gegeben und damit eo ipso als eine der Grundformen in die Reihe der von uns niederzuschreibenden Invarianten aufgenommen. Wir bilden uns $\delta(\sum u_i\, dx_i)$, was wir so schreiben werden:

$$\delta(\sum u_i\, dx_i) = \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_i\, \delta x_k + \sum_r u_r\, \delta\, dx_r\,. \tag{13}$$

Andererseits haben wir uns in der Theorie der geodätischen Linien (S. 173) den zu den dx_r kogredienten Vektor hergestellt:

$$\delta\, dx_r + \sum_{i,k} \left\{ {ik \atop r} \right\} dx_i\, \delta x_k$$

(unter dem Klammerausdruck das sogenannte Christoffelsche Symbol zweiter Art verstanden). Wir haben danach die weitere Invariante:

$$\sum_r u_r\, \delta\, dx_r + \sum_{i,k,r} \left\{ {ik \atop r} \right\} u_r\, dx_i\, \delta x_k\,. \tag{14}$$

---

1) Die Bezeichnung von Ricci hat sich heute fast allgemein eingebürgert. Vgl. Note 1, S. 167. Bei $a_{ik} = \text{const}$, d. h. für Euklidische Räume geht die kovariante Differentiation in die gewöhnliche Differentiation über. (H.)

Wir subtrahieren (14) von (13) und haben so als neue, nur erste Differentiale enthaltende Invariante die Bilinearform:

$$(15)\qquad \sum_{i,k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\sum_r\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r\end{matrix}\right\}u_r\right]d x_i\,\delta x_k\,,$$

die wir abkürzend mit

$$(15')\qquad (\delta)\,(\sum_i u_i\,d x_i)$$

bezeichnen wollen.

Die Erweiterung des Ansatzes auf höhere Fälle geschieht, wie schon angedeutet, in der Weise, daß man statt der Linearform (12) eine Multilinearform zugrunde legt. Stellen wir etwa die Bilinearform

$$(16)\qquad \sum_{i,k} u_{ik}\,d x_i\,d' x_k$$

an die Spitze. Wir haben dann als abgeleitete Invariante zunächst:

$$(17)\qquad \delta\left(\sum_{i,k} u_{ik}\,d x_i\,d' x_k\right)=\sum_{i,k,l}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_r}\,d x_i\,d' x_k\,\delta x_l$$
$$+\sum_{r,k} u_{rk}\,d' x_r\,\delta\,d x_r$$
$$+\sum_{i,s} u_{is}\,d x_i\,\delta\,d' x_s\,,$$

ferner als Invarianten gemäß der Theorie der geodätischen Linien:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\sum_{r,k} u_{rk}\,d' x_k\left(\delta\,d x_r+\sum_{i,l}\left\{\begin{matrix} i\,l \\ r\end{matrix}\right\}d x_i\,\delta x_l\right)\\ \text{bzw.}\quad &\sum_{i,s} u_{is}\,d x_i\left(\delta d' x_s+\sum_{k,l}\left\{\begin{matrix} l\,k \\ s\end{matrix}\right\}d' x_k\,\delta x_l\right)\end{aligned}$$

Indem wir von (17) die beiden (18) subtrahieren, bekommen wir die Trilinearinvariante:

$$(19)\qquad \sum_{i,k,l}\left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l}-\sum_r\left\{\begin{matrix} i\,l \\ r\end{matrix}\right\}u_{rk}-\sum_s\left\{\begin{matrix} l\,k \\ s\end{matrix}\right\}u_{is}\right)d x_i\,d' x_k\,\delta x_l$$

usw. fort.

Natürlich steht nichts im Wege, in diesen Formeln verschiedene Differentialreihen $d x_i$, $d' x_i$, ... zusammenfallen zu lassen und dadurch zu Differentialformen überzugehen, welche in einzelnen Differentialen höheren Grades sind. Umgekehrt kann man vorgelegte Invarianten höheren Grades durch geeignete Polarenbildung immer durch multilineare Verbindungen verschiedener Reihen $d x_i$, $d' x_i$, ... ersetzen.

Als Einzelausführungen mögen noch folgende Angaben hier ihre Stelle finden:

1. Die kontragrediente Ableitung von ds^2 selbst bzw. seiner Polare

$$\Sigma\, a_{ik}\,d x_i\,d' x_k$$

ist identisch Null (Ricci und Levi-Civita, Math. Ann. 54, S. 138).

2. Setzt man in (15) für die $dx_i, \delta x_k$ die ihnen kogredienten a^{ik}, so erhält man in

$$(20) \qquad \sum_{i,k} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_r \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} u_r \right] a^{ik}$$

in rationaler Form die Divergenz des Vektorfeldes u (die wir oben, S. 192, in irrationaler Form abgeleitet hatten); vgl. Math. Ann. 54, S. 195.

3. Um die Koeffizienten (ik, rs) der Riemannschen Krümmungsform durch kontragrediente Differentiation zu gewinnen, bedarf es eines kleinen Umwegs, den wir von rückwärts durchlaufen wollen. Man leite nämlich aus dem Lipschitzschen Ψ, das wir oben (S. 193) erwähnten, durch Eintragung von $\sum\limits_p a^{ik} u_p$ für die $d'x_i$ die neue Invariante ab:

$$(21) \qquad \sum_{i,k,r,s,p} (ik, rs)\, a^{ip} u_p\, \delta' x_k\, dx_r\, \delta x_s .$$

Eben diese, in den $\delta' x$, dx, δx trilineare Form erzeugt man aus $\sum\limits_i u_i\, dx_i$ durch Bildung der Differenz

$$(22) \qquad (\delta)(\delta')(\textstyle\sum u_i\, dx_i) - (\delta')(\delta)(\textstyle\sum u_i\, dx_i) .$$

Man vergleiche Math. Ann. 54, S. 143. (Es ist dieses die Art, wie Einstein in seiner Schrift über die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 49, 1916, zu den (ik, rs) vordringt.)

§ 4. Über Christoffels Abhandlung von 1869.

Wir haben nun alle Voraussetzungen, um Christoffels S. 166 genannte Abhandlung von 1869 nach ihrem Aufbau und ihren Resultaten zu charakterisieren; unser Bericht schließt sich mit den Schlußerörterungen des vorigen Abschnitts gut zusammen.

1. Wie schon früher erwähnt, macht Christoffel nirgendwo von Integralrechnung oder Variationsrechnung Gebrauch; seine einzigen Hilfsmittel sind Differentiation und algebraische Elimination.

2. Im übrigen beginnt er keineswegs damit, wie wir es seither taten, direkte Methoden zur Aufstellung von Invarianten (oder, wie er sagt: Kovarianten) der vorgelegten quadratischen Differentialform $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ zu entwickeln. Vielmehr geht er von dem Äquivalenzproblem aus: wann kann $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ vermöge einer Substitution $x_i = \varphi_i(x'_1 \ldots x'_n)$ in eine zweite vorgelegte Form $\sum a'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k$ transformiert werden? Und erst von hier aus kommt er auf dem Wege komplizierter Elimination zu dem Begriff der Invariante (bzw. Kovariante) von ds^2, welche der entsprechenden Invariante von ds'^2 gleich sein muß, falls Äquivalenz stattfinden soll.

Hierzu ist zu bemerken: auch im Falle der elementaren (linearen) Invariantentheorie hat man versucht, die Äquivalenzfrage als Ausgangspunkt zu wählen (vgl. Aronhold in Crelle 62 (1863): Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie). Man ist aber je länger je mehr davon zurückgekommen, nicht nur weil die Rechnungen sehr kompliziert ausfallen, sondern weil man nicht übersehen kann, wie weit die Betrachtungen, die sich ganz im allgemeinen halten müssen, im speziellen Falle ausreichend sein mögen. Wir haben das schon früher erörtert[1]).

3. Wie dem auch sei, es gelingt Christoffel durch Bewältigung eines sehr umfangreichen Formelapparates, aus der Bilinearform:

$$G_2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k$$

(der Polaren von ds^2) eine *quadrilineare Kovariante* G_4 abzuleiten, die bis auf einen Zahlenfaktor mit dem vorhin erwähnten, bei Lipschitz auftretenden Ψ identisch ist und wie dieses als Polare der Riemannschen Krümmungsform $[\Omega]$ angesehen werden kann.

4. Aus seinem G_4 gewinnt dann Christoffel durch wiederholte Anwendung der kontragredienten Differentiation eine unendliche Zahl weiterer multilinearer Kovarianten. Wir haben so schließlich eine unendliche Reihe von Differentialformen:

$$G_2,\ G_4,\ G_5,\ G_6,\ G_7,\ \ldots$$

5. Und nun entwickelt er einen Satz[2]), den ich als das Hauptergebnis seiner Überlegungen ansehe und den *Reduktionssatz* nennen möchte, weil er die Frage nach der Äquivalenz zweier ds^2 vermöge beliebiger Substitution $x_i = \varphi_i(x_1' \ldots x_n')$ auf eine Äquivalenzfrage der linearen Invariantentheorie reduziert.

Die Sache ist folgende: Mit den Substitutionen $x_i = \varphi_i$ hat man für die Differentiale die linearen Substitutionen:

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1'}\, dx_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n'}\, dx_n'. \tag{24}$$

Aufgefaßt als Formen dieser Differentiale müssen also die

$$G_2,\ G_4,\ G_5,\ \ldots \quad \text{mit den} \quad G_2',\ G_4',\ G_5',\ \ldots$$

linear äquivalent sein (wobei die $x_1 \ldots x_n$ bzw. $x_1' \ldots x_n'$ die Rolle von Parametern spielen). Sei jetzt

$$dx_i = c_{i1}\, dx_1' + \cdots + c_{in}\, dx_n' \tag{25}$$

eine lineare Substitution, welche tatsächlich die G_ν in die entsprechenden G_ν' überführt. Dann wird man zu einer zugehörigen Substitution:

$$x_i = \varphi_i(x_1' \ldots x_n') \tag{26}$$

---

[1]) Auch Riemann geht in seiner Preisarbeit zunächst von der Äquivalenzfrage aus: wann kann $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ in ein ds^2 mit konstanten Koeffizienten übergeführt werden? Aber nachdem er so die Bedingungen $(ik, rs) = 0$ in ziemlich komplizierter Weise erhalten hat, wendet er sich mit den Worten: „Ut indoles harum expressionum melius perspiciatur" zu dem direkten Bildungsgesetze des $[\Omega]$, wie wir es oben in den Abschnitten B und C voranstellten.

[2]) Ohne ihn allerdings als solchen allgemein auszusprechen; dies ist erst durch Ricci geschehen.

doch nur dann aufsteigen können, wenn die c_{ik}, c_{il} die Integrabilitätsbedingungen befriedigen:

$$\frac{\partial c_{ik}}{\partial x'_l} = \frac{\partial c_{il}}{\partial x'_k}. \tag{27}$$

Christoffels Satz ist nun der, daß diese Bedingungen (im Falle unserer Formenreihe G_2, G_4, G_5, ...) von selbst erfüllt sind, so daß also die ganze Äquivalenzfrage in die Frage einer linearen Äquivalenz verwandelt ist.

Der genannte Satz erweitert, wie man sieht, den Herrschbereich der linearen Invariantentheorie. Aber man muß sein Resultat nicht etwa als besonders einfach auffassen. Denn schon die Frage, ob gegebenenfalls G_2 und G_4 mit G'_2 und G'_4 — was die Differentiale angeht — linear äquivalent sind, liegt jenseits der Leistungsfähigkeit der expliziten elementar-invariantentheoretischen Methoden.

6. Ehe wir das Begriffliche weiter verfolgen, müssen wir andeuten, wie Christoffel seinen Satz des weiteren benutzt. Er führt zu dem Zwecke eine fundamentale Fallunterscheidung ein:

α) entweder ds^2 geht (wie wir es heute ausdrücken) durch eine kontinuierliche Gruppe von Substitutionen $x_i = \varphi_i(x'_1 \ldots x'_n)$ in sich selbst über,

β) oder es gibt solche Substitutionen überhaupt nicht oder doch nur in diskreter Zahl.

7. Den Fall α), der gewissermaßen der interessanteste ist, weil er die beiden Fälle $K_R = 0$ und $K_R = \text{const}$ umfaßt, läßt Christoffel des weiteren bei Seite. Ich nehme an, daß dies ursprünglich nicht sein Plan, sondern die Folge späterer Resignation gewesen ist. Hatte er doch vorher die hierhergehörigen Fälle $n = 2$ bereits in Angriff genommen[1]). Aber schon bei $n = 3$ gibt es eine große Zahl von hier in Betracht kommenden Möglichkeiten. Es konnte dies erst klargestellt werden, als durch Lie eine allgemeine Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen geschaffen war. Bei gegebenem ds^2 kommt immer nur eine Gruppe mit endlicher Parameterzahl in Betracht und eben diesen „endlichen" Gruppen hat Lie sein großes, von 1888—1893 erschienenes zusammenfassendes Werk gewidmet[2]). Im Anschluß daran hat Bianchi später alle bei $n = 3$ auftretenden Möglichkeiten aufgezählt[3]). Wir können diese Sache hier nicht weiter verfolgen.

8. Um so eingehender behandelt Christoffel den Fall β). Wenn überhaupt eine isolierte Substitution vorhanden ist, welche ds^2 in ds'^2 überführt, so muß sich dies schon an der linearen Äquivalenz einer end-

---

[1]) Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Math. Abhandlungen der Berliner Akademie (= Christoffels Ges. Werke I, S. 297 ff.).

[2]) Theorie der Transformationsgruppen. 3 Bde., Leipzig, 188—93. Unter Mitwirkung von Fr. Engel.

[3]) Memoria della Società Italiana delle Scienze, ser. 3a, t. XI, 1897.

lichen Zahl der aufeinander folgenden Reihenglieder G_2, G_4, G_5, ... mit den bezüglichen G_2', G_4', G_5', ... zeigen. Eine obere, in jedem Falle ausreichende Grenze für die Zahl dieser Reihenglieder wird aber nicht gegeben. Auch bedarf wohl das, was Christoffel über den Nachweis dieser Äquivalenz durch den Vergleich der beiderseits aufzustellenden Linearinvarianten sagt, der Nachprüfung.

Ich deute nun an, wie Christoffels Reduktionssatz mit den am Ende des vorigen Abschnitts gegebenen Betrachtungen (S. 187 ff.) zusammenhängt.

Es sei ds^2 mit ds'^2 in der Weise äquivalent, daß dem Punkte O des Raumes der x der Punkt O' des Raumes der x' entspricht.

Dann sind G_2, G_4, G_5, ..., berechnet für den Punkt O mit den G_2', G_4', G_5', ... berechnet für den Punkt O', d. h. zwei Reihen von Differentialformen mit konstanter Koeffizienten, die wir zweckmäßigerweise

$$(28) \qquad G_2^0, G_4^0, G_5^0, \ldots \quad \text{und} \quad G_2'^0, G_4'^0, G_5'^0, \ldots$$

nennen, linear äquivalent. Wir werden sie vereinfachen, indem wir beiderseits Riemannsche Normalkoordinaten $y_1 \ldots y_n$ bzw. $y_1' \ldots y_n'$ einführen. Es verwandeln sich dann G_2^0 bzw. $G_2'^0$, oder vielmehr die ihnen entsprechenden ds^2 und ds'^2, in $\sum dy_i^2$ bzw. $\sum dy_i'^2$, und die lineare Äquivalenz wird notwendigerweise eine orthogonale (nicht nur der dy_i, sondern auch, weil es sich um konstante Substitutionskoeffizienten handelt, der y_i selbst). Indem wir die Substitution ausdrücklich als solche bezeichnen, können wir fortan G_2^0 und $G_2'^0$ aus der Reihe der zu Vergleich gestellten Formen weglassen. Also G_4^0, G_5^0, ... und $G_4'^0$, $G_5'^0$, ... sollen durch eine orthogonale Substitution der y_i äquivalent sein.

Nun entspricht G_4^0, wie wir von früher her wissen, bis auf einen Zahlenkoeffizienten der quadrilinearen Polare des Riemannschen Differentialausdrucks:

$$(29) \qquad \sum (ik, rs)_0 \, (dy_i \, \delta y_k - \delta y_i \, dy_k) \, (dy_r \, \delta y_s - \delta y_r \, dy_s).$$

Eine einfache Überlegung, die wir hier leider nicht ausführen können, zeigt ferner, daß G_5^0, G_6^0, ... in ähnlicher Weise, — bis auf Terme niederer Ordnung, welche den Vergleich nicht stören —, den

$$(29') \qquad \begin{aligned} &\sum (ik, rs)_1 \, (dy_i \, \delta y_k - \delta y_i \, dy_k) \, (dy_r \, \delta y_s - \delta y_r \, dy_s) \\ &\sum (ik, rs)_2 \, (\text{———}) \, (\text{———}) \end{aligned}$$

usw. entsprechen, unter $(ik, rs)_1$, $(ik, rs)_2$, ... die Terme erster, zweiter usw. Ordnung verstanden, welche bei der Reihenentwicklung der (ik, rs) nach Potenzen der y_i entstehen. Der Christoffelsche Satz läuft danach darauf hinaus, daß diese sukzessiven Ausdrücke vermöge einer orthogonalen Substitution der y_i den entsprechenden akzentuierten Ausdrücken äquivalent sein sollen, das heißt aber, daß überhaupt

$$\sum (ik, rs)\,(dy_i\,\delta y_k - \delta y_i\,dy_k)\,(dy_r\,\delta y_s - \delta y_r\,dy_s) \tag{30}$$

dem entsprechenden Ausdruck in akzentuierten Buchstaben orthogonal äquivalent sein muß.

Nun kommt doch die orthogonale Substitution in diese ganze Fassung nur dadurch hinein, daß bei gegebenem O die Normalkoordinaten y_i immer noch bis auf eine orthogonale Substitution unbestimmt sind. Dem Wesen der Sache nach läuft daher der Christoffelsche Satz genau auf die Behauptung von S. 187 hinaus, daß das normierte ds^2 durch Angabe des Ausdrucks (30) völlig mitgegeben ist. Wir können sagen, daß der Christoffelsche Satz für ein beliebiges Koordinatensystem $(x_1 \ldots x_n)$ genau das ausspricht, was wir für das spezialisierte Koordinatensystem auf S. 187 entwickelt haben.

Ich habe diesen ganzen Gedankengang hier nur eben skizzieren können und hoffe sehr, daß er bald von anderer Seite eine ausführlichere Darlegung findet. Man sehe z. B. die am 25. Januar 1918 der Göttinger Societät vorgelegte Note von Frl. Noether: „*Invarianten beliebiger Differentialausdrücke.*“ [1])

§ 5. Charakterisierung von Invarianten durch infinitesimale Transformationen (Lie).

Infinitesimale Transformationen sind eigentlich nur eine besondere Art, Variationen irgendwelcher Parameter aufzufassen; das Neue gegenüber den Arbeiten aus den ersten Dezennien des 19. Jahrhunderts liegt in ihrer Verbindung mit dem Gruppenbegriff bzw. der Invariantentheorie.

Daß man die Invarianten der Gruppe linearer Substitutionen durch ihr Verhalten gegenüber infinitesimalen Transformationen charakterisieren könne, und daß hierauf das Bestehen linearer partieller Differentialgleichungen für die Invarianten beruhe, wurde wohl zuerst von Sylvester (1852) bemerkt. Ein einfachstes Beispiel mag genügen, um den Grundgedanken hervortreten zu lassen.

Wir betrachten eine binäre quadratische Form

$$f = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \tag{31}$$

(mit konstanten Koeffizienten) und wollen untersuchen, ob es rationale ganze, homogene Verbindungen zweiten Grades der a_{ik} gibt, welche gegenüber unimodularen linearen Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2' \end{aligned}\right| \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{32}$$

[1]) Vgl. ferner: H. Vermeil: Differentialinvarianten bei quadratischen Differentialformen, Math. Ann. 79 (1919), sowie H. Weyl: Raum, Zeit, Materie; Anhang I der 5. Auflage, Berlin 1925.

invariant sind. — Zu dem Zwecke bemerken wir — ich verfahre ganz ohne Kunstgriff —, daß sich unter den Substitutionen (32) folgende infinitesimale befinden:

$$\text{(33a)}\quad \begin{matrix} x_1 = (1+\varepsilon)\,x_1' \\ x_2 = (1-\varepsilon)\,x_2' \end{matrix}, \qquad \text{(33b)}\quad \begin{matrix} x_1 = x_1' + \eta x_2' \\ x_2 = x_2' \end{matrix}, \qquad \text{(33c)}\quad \begin{matrix} x_1 = x_1' \\ x_2 = \zeta x_1' + x_2' \end{matrix}$$

(aus denen sich die allgemeinsten (32) durch Wiederholung und Kombination zusammensetzen lassen). Wir können die Substitutionen (33) auch so schreiben:

$$\text{(34a)}\quad \begin{matrix} \delta x_1 = -\varepsilon x_1 \\ \delta x_2 = +\varepsilon x_2 \end{matrix}, \qquad \text{(34b)}\quad \begin{matrix} \delta x_1 = -\eta x_2 \\ \delta x_2 = 0 \end{matrix}, \qquad \text{(34c)}\quad \begin{matrix} \delta x_1 = 0 \\ \delta x_2 = -\zeta x_1 \end{matrix}$$

Es handelt sich nun vor allen Dingen darum, die Substitutionen anzugeben, welche diesen (33), (34) entsprechend die Koeffizienten a_{ik} von f erleiden[1]). Wir finden:

ad a)

$$\begin{aligned} f &= a_{11}' x_1'^2 + 2a_{12}' x_1' x_2' + a_{22}' x_2'^2 \\ &= a_{11}(1+2\varepsilon)\,x_1'^2 + 2a_{12}\,x_1' x_2' + a_{22}(1-2\varepsilon)\,x_2'^2 \end{aligned}$$

und damit:

$$\text{(35a)}\qquad \delta a_{11} = 2\varepsilon a_{11}, \quad \delta a_{12} = 0, \quad \delta a_{22} = -2\varepsilon a_{22}.$$

Entsprechend kommt ad b) und c):

$$\text{(35b)}\qquad \delta' a_{11} = 0, \; \delta' a_{12} = \eta a_{11}, \; \delta' a_{22} = 2\eta a_{12}$$

$$\text{(35c)}\qquad \delta'' a_{11} = 2\zeta a_{12}, \; \delta'' a_{12} = \zeta a_{22}, \; \delta'' a_{22} = 0.$$

Die Inkremente, welche eine Invariante $J\,(a_{11}, a_{12}, a_{22})$ bei diesen infinitesimalen Substitutionen gewinnt, müssen Null sein. Daher erhält man die drei partiellen Differentialgleichungen, welche zugleich J als Invariante charakterisieren[2]):

$$\text{(36)}\qquad \begin{aligned} a_{11}\frac{\partial J}{\partial a_{11}} - a_{22}\frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= 0, \\ a_{11}\frac{\partial J}{\partial a_{12}} + 2a_{12}\frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= 0, \\ 2a_{12}\frac{\partial J}{\partial a_{11}} + a_{22}\frac{\partial J}{\partial a_{12}} &= 0. \end{aligned}$$

Soll nun J (um bei unserem einfachsten Beispiel zu bleiben) irgend eine lineare Verbindung der Aggregate zweiten Grades sein:

$$a_{11}^2, \; a_{11}\,a_{12}, \; a_{11}\,a_{22}, \; a_{12}^2, \; a_{12}\,a_{22}, \; a_{22}^2,$$

so findet man sofort, daß J bis auf einen Zahlenfaktor mit

$$\text{(37)}\qquad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

übereinstimmen muß.

---

[1]) Es ist natürlich immer so zu rechnen, daß man Potenzen höheren Grade der ε, η, ζ wegwirft.

[2]) Vgl. Weitzenböck (l. c. S. 2), S. 204ff. (H.)

Ähnlich in allen höheren Fällen. Man wird sofort verstehen, was die Methode hauptsächlich leistet: Die volle Ausrechnung höherer Invarianten kann kaum der Zweck sein, denn man kann mit den resultierenden langen Ausdrücken doch nicht operieren. Vielmehr liegt die Stärke der Methode nach seiten der Abzählung der linear unabhängigen Invarianten irgendwelcher Bauart.

Nun die Verallgemeinerung, die mein Jugendfreund, der Norweger Sophus Lie (der bei meinem Erlanger Programm Pate stand, und von dessen Arbeiten noch in einem späteren Kapitel dieses Buchs viel die Rede sein wird)[1]) in zahlreichen Veröffentlichungen von etwa 1875 ab diesem Gedanken gegeben hat. An Stelle der Gruppe (32), bzw. der sie erzeugenden infinitesimalen Transformationen (33) wird man eine beliebige kontinuierliche Substitutionsgruppe und die zu ihr gehörigen infinitesimalen Transformationen setzen, und dann für diejenigen Größen, aus denen man eine Invariante zusammensetzen will, die zugehörigen „induzierten" infinitesimalen Transformationen berechnen.

Wir wählen als Gruppe hier gleich diejenige G_∞, die uns überhaupt gegenwärtig beschäftigt, also die Gesamtheit aller analytischen Substitutionen

$$x_i = \varphi_i(x_1' \ldots x_n'). \tag{38}$$

Sie enthält als erzeugende infinitesimale Transformationen diese:

$$\delta x_1 = f_1(x_1 \ldots x_n), \; \ldots, \; \delta x_n = f_n(x_1 \ldots x_n), \tag{39}$$

unter f sonst beliebige analytische Funktionen der $(x_1 \ldots x_n)$ verstanden, die man in dem Bereiche, in welchem man gerade operiert, wohlgemerkt, mit allen ihren Differentialquotienten, als unendlich kleine Größen behandeln darf.

Nehmen wir etwa der Einfachheit halber wieder $n = 2$ und als Objekt der Invariantenbildung eine quadratische Differentialform

$$ds^2 = E\,dx_1^2 + 2F\,dx_1\,dx_2 + G\,dx_2^2, \tag{40}$$

so werden wir erstlich die induzierten Substitutionen berechnen, welche den Formeln (39) entsprechend die dx_i, dann die E, F, G, dann ihre nach den x_1, x_2 genommenen ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten erleiden. Diese Substitutionen werden ziemlich umständlich, weil die in (39) auftretenden f_i nicht nur selbst, sondern mit ihren ersten und zweitenDifferentialquotienten eingehen. Mit ihrer Hilfe mag man dann beispielsweise konstatieren, daß das Gaußische Krümmungsmaß in der Tat bei Zugrundelegung unserer G_∞ eine Invariante von (40) ist. Neue induzierte Substitutionen (für die partiellen Differentialquotienten irgendwelcher vorgegebener Funktion $F(x_1 \ldots x_n)$ müssen wir heranziehen, wenn wir das Analoge für die Beltramischen Differentialpara-

[1]) Das Kapitel blieb unvollendet. (H.)

meter beweisen wollen, usw. So ist es im 16. Bande der Acta Mathematica von Lies Schüler, dem Polen Zorawski, ausgeführt worden.

Wollte man seine Rechnungen als bloße Verifikationen bekannter Resultate ansehen, so würde man ihnen vielleicht wenig Wert beilegen. Aber sie reichen tatsächlich weiter, indem sie zeigen, daß es, im vorliegenden Falle, einfachere Invarianten, als die genannten, überhaupt nicht gibt. Bei größeren Werten von n gibt es natürlich viel zahlreichere Invarianten. Abzählungen in dieser Hinsicht hat ein anderer Schüler von Lie, der Amerikaner Haskins, angestellt; vgl. Transactions of the American Mathematical Society, t. III, 1902.

Ich will hier nicht auf Einzelheiten eingehen. Wohl aber will ich im folgenden Paragraphen noch an einem Beispiele zeigen, wie nützlich eine Verbindung dieser Überlegungen mit den Integralmethoden der Variationsrechnung sein kann. Es ist ein Mangel der Lieschen Schule, daß sie dieser Verbindung immer ausgewichen ist.

§ 6. Von der vektoriellen Divergenz eines beliebigen Tensors t_{ik}.

Da mein nächstes Ziel ist, die Bedeutung der hier entwickelten Theorien für die moderne Physik darzulegen[1]) wähle ich das Beispiel in engem Anschluß an die physikalischen Betrachtungen des zweiten Kapitels. Wir hatten damals Anlaß, die Variabelnzahl $n = 4$ zu setzen und das Bogenelement in der einfachsten Weise zu definieren:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{41}$$

(wodurch der Unterschied zwischen kogredienten und kontragredienten Größen verschwand). War dann t_{ik} ein symmetrischer Tensor (ein Zehnertensor, wie wir damals sagten), so leiteten wir aus ihm einen zugehörigen Vektor ab, den wir seine *vektorielle Divergenz* nannten. Seine Komponenten waren einfach

$$\sum \frac{\partial t_{1k}}{\partial x_k}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{\partial t_{4k}}{\partial x_k} \tag{42}$$

(siehe S. 84 und die auf S. 101 folgenden Erläuterungen über deren physikalische Bedeutung). Die Aufgabe soll sein, diese Entwicklungen nunmehr auf ein beliebiges $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ (mit n Variabeln) sinngemäß zu übertragen.

Sei uns also wieder ein symmetrischer Tensor t_{ik} gegeben (den wir jetzt ausdrücklich als „kontragredient" bezeichnen, um anzudeuten, daß sich seine Komponenten ebenso umsetzen sollen, wie die a_{ik}).

Wir werden ferner neben den a_{ik} gleich die Koeffizienten a^{ik} der

[1]) Vgl. das Vorwort. (H.)

konjugierten Form einführen. Es ist dann $\sum t_{ik}\, a^{ik}$, oder, wenn wir uns auf unendlich kleine Werte der a^{ik} beschränken, die wir δa^{ik} nennen,

$$\sum t_{ik}\, \delta a^{ik} \tag{43}$$

eine Invariante, ebenso natürlich das über irgend ein Gebiet erstreckte Integral

$$\int \left(\sum t_{ik}\, \delta a^{ik}\right) \left(\sqrt{a}\, dx_1 \ldots dx_n\right). \tag{44}$$

Wir berechnen nun insbesondere die Werte der δa^{ik}, welche durch eine infinitesimale Transformation:

$$x_r = x'_r + f^r(x_1 \ldots x_n) \tag{45}$$

induziert werden.

Zu dem Zwecke müssen wir uns vor allen Dingen daran erinnern, daß sich, bei irgendwelchen Transformationen der x, die a^{ik} zu den Produkten $dx_i\, dx_k$ kogredient verhalten. Andererseits werden wir Terme höherer Ordnung in den unendlich kleinen f^r, bzw. ihren Differentialquotienten, von vornherein vernachlässigen. Wir finden dann durch kurze Zwischenrechnung, wenn wir

$$\frac{\partial f^k}{\partial x_r} = f^k_r$$

setzen:

$$a^{ik'}(x'_1 \ldots x'_n) = a^{ik}(x_1 \ldots x_n) - \sum_r a^{ir} f^k_r - \sum_r a^{kr} f^i_r. \tag{46}$$

Aber

$$a^{ik'}(x'_1 \ldots x'_n)$$

wird durch

$$a^{ik'}(x_1 \ldots x_n) - \sum_k \frac{\partial a^{ik'}}{\partial x_r} f^r$$

zu ersetzen sein. Solcherweise ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta a^{ik} &= a^{ik'}(x_1 \ldots x_n) - a^{ik}(x_1 \ldots x_n) \\ &= \sum_r \left(\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r} f^r - a^{ir} f^k_r - a^{kr} f^i_r\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Mit diesen Werten der δa^{ik} gehen wir in das Integral (44) ein. Wir erhalten so als neue Integralinvariante:

$$\int \left(\sum_{i,k,r} t_{ik} \left(\frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r} f^r - a^{ir} f^k_r - a^{kr} f^i_r\right)\right) \left(\sqrt{a}\, dx_1 \ldots dx_n\right). \tag{48}$$

Hier gestalten wir die Glieder mit f^k_r, f^i_r in der bekannten Weise durch partielle Integration um, indem wir zugleich annehmen, daß der sonst willkürliche Vektor f^r an den Integrationsgrenzen verschwindet. So bekommen wir, nachdem wir noch durch 2 dividiert haben, als Invariante

$$\int \frac{\left(\sum_r f^r \left\{\sum_{i,k} \frac{\partial\left(\sqrt{a}\, t_{ir}\, a^{ik}\right)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sqrt{a} \sum_{i,k} t_{ik} \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r}\right\}\right)}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a}\, dx_1 \ldots dx_n\right), \tag{49}$$

aber f^r ist ein ganz willkürlicher, kogredienter Vektor. Wir schließen, daß der Ausdruck

$$\frac{\sum_{i,k} \frac{\partial(\sqrt{a}\, t_{ir}\, a^{ik})}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sqrt{a} \sum_{i,k} t_{ik} \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_r}}{\sqrt{a}} \tag{50}$$

für $r = 1, 2, 3, 4$ einen kontragredienten Vektor definiert, den wir eben die vektorielle Divergenz von t_{ik} nennen.

In der Tat reduziert er sich, wenn die a^{ik} konstant sind, auf

$$\sum_{i,k} \left(a^{ik} \frac{\partial t_{ir}}{\partial x_k} \right)$$

und wenn speziell alle $a^{ii} = 1$, die anderen $a^{ik} = 0$ sind, auf

$$\sum_k \frac{\partial t_{kr}}{\partial x_k},$$

d. h. auf die Größen (42). Dies will heißen, daß der Vektor (50) aus (42) hervorgeht, sobald wir für die ursprünglichen x beliebige Funktionen derselben als neue x einführen und das aus $\sum d x_i^2$ dabei entstehende neue ds^2 mit $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ bezeichnen. Wir erhalten hierbei natürlich nicht das allgemeinste ds^2, sondern immer nur ein solches von verschwindendem Riemannschen Krümmungsmaß. Immerhin wird es eine sinngemäße Verabredung sein, auch bei beliebig vorgegebenem ds^2 den Vektor (50) als vektorielle Divergenz des Tensors t_{ik} zu bezeichnen. Denn die Rechnungen, die wir anstellten, sind so elementar, daß sie durch Nullsetzen des Riemannschen Krümmungsmaßes an keiner Stelle eine Vereinfachung erfahren. — Es ist dies genau dasselbe Verfahren der Analogie, dessen sich Beltrami bediente, wenn er den Begriff des ersten oder zweiten Differentialparameters auf beliebige ds^2 ausdehnte — oder schließlich überhaupt dasselbe Verfahren, von dem Riemann selbst Gebrauch machte, als er ein beliebiges ds^2 als Grundlage für die Geometrie des n-dimensionalen Raumes an die Spitze stellte.

Schlußbemerkung.

Indem wir hiermit die Entwicklungen des dritten Kapitels schließen, wollen wir nicht unterlassen hervorzuheben, daß wir trotz großer Ausführlichkeit doch nur einen kleinen Teil der in der Literatur vorliegenden Entwicklungen, sei es der reinen Analysis, sei es der analytischen Geometrie oder analytischen Mechanik, in unsere Darstellung eingearbeitet haben. Aber vielleicht hat unsere Darstellung doch einiges Verdienst, weil wir bestimmte Ideenbildungen in den Vordergrund gestellt haben, die sonst nur hinterher und mehr beiläufig zur Geltung gebracht werden.

Erläuterungen zum dritten Kapitel.

1. Die moderne Differentialgeometrie in n Dimensionen hat über den Zustand hinaus, den Klein bei der Abfassung dieses Kapitels vor Augen hatte, zwei wesentliche Fortschritte gemacht.

I. Der neu entstandene Begriff „*Infinitesimale Parallelverschiebung*" hat die Theorie der geodätischen Linien und die des Gaußschen Krümmungsmaßes vertieft und hat die Bedeutung der „Dreiindizessymbole" geklärt.

II. Durch den *Ricci-Kalkül* ist das rein Rechnerische der Probleme so durchsichtig geworden, daß die wesentlichen geometrischen Fragen nicht mehr von Schwierigkeiten formaler Art verdeckt werden; das war früher anders.

Die schnellste Einführung in die moderne Differentialgeometrie gibt das zweite Kapitel des Werkes von *A. S. Eddington*: *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung* (Berlin 1925).

Mehr Arbeit erfordern die folgenden, tieferen Darstellungen des Gegenstandes:

H. Weyl: *Raum, Zeit, Materie.* Berlin, 3. Aufl. 1919, 5. Aufl. 1925.

T. Levy-Civita: *Lezioni di calcolo differenziale assoluto.* Rom 1925.

Einen gründlichen Bericht über alle einschlägigen Arbeiten findet man in dem Werk von D. J. Struik: Mehrdimensionale Differentialgeometrie. Berlin 1922.

Kleins Behandlungsweise des Gebietes hat auch heute nicht ihren Wert verloren. Sie legt das Fundament frei, auf dem die modernen Methoden stehen. Wer in ihnen schon aufgewachsen ist, läuft Gefahr, jene Grundlagen zu vergessen und nur noch „weiterzurechnen". Dem wird hier entgegengewirkt.

Die von Klein bevorzugte invariantentheoretische Formulierung verhält sich zum Tensorbegriff, der die anderen Darstellungen beherrscht, ähnlich wie die Gleichung

$$b x = a$$

sich zu

$$x = \frac{a}{b}$$

verhält.

Schnell rechnen kann man nur mit der zweiten. Aber an entscheidenden Stellen wird man auf die erste zurückgreifen müssen.

2. S. 159: Vgl. Anmerkung 4 zum ersten Kapitel.

3. S. 171: Offenbar kann man die Differentialinvarianten auffassen als Grenzfälle von Simultaninvarianten zweier oder mehrerer Punkte des Feldes, die man zusammenrücken läßt.

4. S. 172/174: Zu §§ 4, 5 vergleiche man besonders die Darstellung bei Eddington (l. c. Anmerkung 1); der Leser wird dort ohne weitere

leitung die Fortschritte erkennen, die die moderne Forschung über den Kleinschen Bericht hinaus erzielt hat.

5. S. 182: Formel (19) gibt die Möglichkeit, aus den Riemannschen Normalkoordinatensystemen, die ja nur bis auf eine orthogonale Substitution bestimmt waren, eine invariante Auswahl zu treffen: Man suche das System so zu wählen, daß die quadratische Form $\sum K_{ik}^{(n)} dx_i dx_k$ auf Hauptachsen transformiert ist, d. h. keine gemischten Glieder enthält. Das ist immer möglich, und zwar im wesentlichen nur auf eine Weise, wenn die Eigenwerte der Form alle verschieden sind.

Namenverzeichnis.

ALMOST PERIODIC FUNCTIONS, By **H. Bohr.** 1932. 120 pages. 6x9. Lithotyped. Cloth. Original German edition was published at $4.50. **$2.50**

From the famous series *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete,* this monograph is a beautiful exposition of the subject of almost periodic functions, written by the creator of the theory.

THEORIE DER KONVEXEN KORPER, By **T. Bonnesen and W. Fenchel.** 1934. 171 pages. 5½x8½. Cloth. Originally published (*paper bound*) at $7.50. **$3.50**

"The reading of this remarkable monograph . . . is extremely suggestive and . . . well worth the effort."—*J. D. Tamarkin, Bulletin of the A. M. S.*

VORLESUNGEN UBER REELLE FUNKTIONEN, By **C. Carathéodory.** 2nd, latest complete, edn. 728 pp. 5½x8½. Originally published at $11.60. **$6.95**

This great classic is at once a book for the beginner, a reference work for the advanced scholar and a source of inspiration for the research worker.

REELLE FUNKTIONEN, By **C. Caratheodory.** 1939. 190 pages. 5¼x8. **$3.50**

Reelle Funktionen is a rewriting of the elementary part (the first third) of the author's famous *Vorlesungen Ueber Reelle Funktionen.*

EIGENWERTPROBLEME UND IHRE NUMERISCHE BEHANDLUNG, By **L. Collatz.** 1945. 350 pages. 5½x8½. Originally published at $8.80. **$4.50**

"Part I presents an interesting and valuable collection of **PRACTICAL APPLICATIONS.**

"Part II deals with the **MATHEMATICAL THEORY.**

"Part III takes up various methods of **NUMERICAL SOLUTION** of boundary value problems. These include step by step approximations, graphical integration, the Rayleigh-Ritz method and methods depending o
throughout the book,
touch with practice

DETERMINANTENTHEORIE EINSCHLIESSLICH DER FREDHOLMSCHEN DETERMINANTEN, By G. Kowalewski. Third edition, 1942. 328 pages. 5½x8. $4.25

"a classic in its field."—*Bulletin of the A. M. S.*

PARTIAL CONTENTS: Definition and Simple Properties . . . Systems of Linear Equations . . . Symmetric, skew-symmetric, Othogonal Determinants . . . Resultants and Discriminants . . . Linear and Quadratic Forms . . . Functional, Wronskian, Gramian determinants . . . Geometrical applications . . . Linear Integral Equations . . . Theory of Elementary Divisors.

IDEALTHEORIE, By W. Krull. 1935. 159 pages. 5½x8½. cloth. Originally published (*paper bound*) at $7.00. $3.50

From *Ergebnisse der Mathematik.*

"highly recommended."—*Bulletin of the A. M. S.*

GRUNDLAGEN DER ANALYSIS, By E. Landau. Originally published at $4.00. $2.75

"Certainly no clearer treatment of the foundations of the number system can be offered. . . . One can only be thankful to the author for this fundamental piece of exposition which is alive with his vitality and genius."
—*J. F. Ritt.*

The student who wishes to learn mathematical German will find this book ideally suited to his needs. *Less than fifty German words* will enable him to read the entire book with only an occasional glance at the vocabulary! [A *complete* German-English vocabulary has been added.]

ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE, By E. Landau. 1927. vii+180+iv pages. 5½x8½.

$3.50

"Interest is enlisted at once and sustained by the accuracy, skill, and enthusiasm with which Landau marshals . . . facts and simplifies . . . details."

—*G. D. Birkhoff, Bulletin of the A. M. S.*

Many instructors will wish to use *Elementare Zahlentheorie* as a text or supplementary text. As in most of Landau's works, the German is quite simple.

VORLESUNGEN UBER ZAHLEN-THEORIE, By E. Landau. 1937. 864 pages. 5½x8½. Originally published at $26.40.
Three volumes **$15.00**

Landau's monumental treatise is a virtual encyclopedia of number theory, and is universally recognized as the standard work on the subject.

Vol. I, Pt. 2. Additive Number Theory. Vol. II. Analytic Number Theory. Vol. III. Algebraic Number Theory. [Vol. I, Part I is issued as *Elementare Zahlentheorie.*]

DARSTELLUNG UND BEGRUENDUNG EINIGER NEUERER ERGEBNISSE DER FUNKTIONENTHEORIE, By E. Landau. Second edition, 1929. 122 pages. 5¼x8. Originally published at $4.00. **$2.95**

". . . a veritable mine of important results."
—*J. F. Ritt.*

EINFUHRUNG IN DIE ELEMENTARE UND ANALYTISCHE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLEN UND DER IDEALE, By E. Landau. Second edn. vii+147 pages. 5½x8. **$2.95**

Landau's book covers substantially different material both from that in Hecke's book and that in the third volume of Landau's own famous *Vorlesungen Über Zahlentheorie.*

LE CALCUL DES RESIDUS, By E. Lindelöf. 151 pages. 5½x8½. **$2.95**

Important applications in a striking diversity of mathematical fields: statistics, number theory, the theory of Fourier series, the calculus of finite differences, mathematical physics and advanced calculus as well as function theory itself.

THE THEORY OF MATRICES, By C. C. MacDuffee. Second edition. 116 pages. 6x9. Published originally at $5.20. **$2.75**

From *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete.*

"No mathe
this book."—

FORMULAS AND THEOREMS FOR THE SPECIAL FUNCTIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS, By W. Magnus and F. Oberhettinger. 1948. 182 pages. 6 x 9. German edition was published at $7.00. **$3.50**

Gathered into a compact, handy and well-arranged reference work are thousands of results on the many important functions needed by the physicist, engineer and applied mathematician.

IRRATIONALZAHLEN, By O. Perron. Second edition, 1939. 207 pages. 5½x8. **$3.25**

Methods of introducing irrational numbers (Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Cantor, Méray, Bachman, etc.) *Systematic fractions, continued fractions, Cantor's series and algorithm, Lüroth's and Engel's series, Cantor's products.* Approximation, including Diophantine approximations, *Kronecker theorem, Algebraic and transcendental numbers (including transcendency proofs for e and π; Liouville numbers, etc.)*

SUBHARMONIC FUNCTIONS, By T. Radó. 1937. iv+56 pp. 5½x8½ inches. **$2.00**

From the famous series *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete.*

"Will be welcomed by general readers and will be particularly valuable for specialists. . . . The applications treated in the book are numerous and the topics wisely selected."

—*J. D. Tamarkin, Bulletin of the A. M. S.*

KNOTENTHEORIE, By K. Reidemeister. 1932. 78 pages. 5½x8½. **$2.25**

"well written . . . the problem is . . . fascinating. The complete and concise little work of Reidemeister will do much to encourage further [research]."—*Bulletin of the American Mathematical Society.*

FOURIER SERIES, By W. Rogosinski. 1950. 182 pp. 4½x6½ inches. (English translation). **$2.50**

This text, designed for beginners with no more background than a year of calculus, covers, nevertheless, an amazing amount of ground. It is suitable for self-study courses as well as classroom use.

"Up to modern standards and, at the same time, suitable for beginners."—*F. Riesz, Acta Szeged.*

LEHRBUCH DER TOPOLOGIE, By H. Seifert and W. Threlfall. 1934. 360 pages. 5½x8½. Originally published at $8.00. **$4.50**

This famous book is the only modern work on *combinatorial topology* addressed to the student as well as to the specialist. It is almost indispensable to the mathematician who wishes to gain a knowledge of this important field.

"The exposition proceeds by easy stages **with examples and illustrations at every turn."**

—*Bulletin of the A. M. S.*

VARIATIONSRECHNUNG IM GROSSEN, (Theorie von Marston Morse), By H. Seifert and W. Threlfall. 1938. 120 pages. 6x9. $2.75

The brilliant expository talents of Professors Seifert and Threlfall—familiar to the many readers of their *Lehrbuch der Topologie*—are here devoted to an eminently readable account of the calculus of variations in the large.

Topologically the book is self-contained.

A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PROBABILITY, By I. Todhunter. 640 pages. 5¼x8. Previously published at $8.00. **$4.95**

Introduces the reader to *almost every process and every species of problem which the literature of the subject can furnish.* Hundreds of problems are solved in detail.

LECTURES ON THE GENERAL THEORY OF INTEGRAL FUNCTIONS By G. Valiron. 1923. xii+208 pages. 5¼x8. $3.50

"Will not be found difficult by the earnest student. He may hope to master it without any elaborate preliminary preparation."—*W. H. Young.*

GRUPPEN VON LINEAREN TRANSFORMATIONEN, By B. L. van der Waerden. 1935. 94 pages. 5½x8½. cloth. $2.50

From *Ergebnisse der Mathematik.*

LEHRBUCH DER TOPOLOGIE, By H. Seifert and W. Threlfall. 1934. 360 pages. $5\frac{1}{2}$x$8\frac{1}{2}$. Originally published at $8.00. $4.50

This famous book is the only modern work on *combinatorial topology* addressed to the student as well as to the specialist. It is almost indispensable to the mathematician who wishes to gain a knowledge of this important field.

"The exposition proceeds by easy stages with examples and illustrations at every turn."

—*Bulletin of the A. M. S.*

VARIATIONSRECHNUNG IM GROSSEN, (Theorie von Marston Morse), By H. Seifert and W. Threlfall. 1938. 120 pages. 6x9. $2.75

The brilliant expository talents of Professors Seifert and Threlfall—familiar to the many readers of their *Lehrbuch der Topologie*—are here devoted to an eminently readable account of the calculus of variations in the large.

Topologically the book is self-contained.

A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PROBABILITY, By I. Todhunter. 640 pages. $5\frac{1}{4}$x8. Previously published at $8.00. $4.95

Introduces the reader to *almost every process and every species of problem which the literature of the subject can furnish.* Hundreds of problems are solved in detail.

LECTURES ON THE GENERAL THEORY OF INTEGRAL FUNCTIONS By G. Valiron. 1923. xii+208 pages. $5\frac{1}{4}$x8. $3.50

"Will not be found difficult by the earnest student. He may hope to master it without any elaborate preliminary preparation."—*W. H. Young.*

GRUPPEN VON LINEAREN TRANSFORMATIONEN, By B. L. van der Waerden. 1935. 94 pages. $5\frac{1}{2}$x$8\frac{1}{2}$. cloth. $2.50

From *Ergebnisse der Mathematik.*

VORLESUNGEN UBER HOHERE GEOMETRIE, By Felix Klein. Third edition. 413 pages. 5½x8. Originally published at $10.80. **$4.95**

In this third edition there has been added to the first two sections of *Klein's* classical work a third section written by Professors *Blaschke, Radon, Artin* and *Schreier* on recent developments.

VARIATIONSRECHNUNG IM GROSSEN, (Theorie von Marston Morse), By H. Seifert and W. Threlfall. 1938. 120 pages. 6x9. **$2.75**

The brilliant expository talents of Professors Seifert and Threlfall—familiar to the many readers of their *Lehrbuch der Topologie*—are here devoted to an eminently readable account of the calculus of variations in the large.

Topologically the book is self-contained.

A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PROBABILITY, By I. Todhunter. 640 pages. 5¼x8. Previously published at $8.00. **$4.95**

Introduces the reader to *almost every process and every species of problem which the literature of the subject can furnish.* Hundreds of problems are solved in detail.

LECTURES ON THE GENERAL THEORY OF INTEGRAL FUNCTIONS By G. Valiron. 1923. xii+208 pages. 5¼x8. **$3.50**

"Will not be found difficult by the earnest student. He may hope to master it without any elaborate preliminary preparation."—*W. H. Young.*

GRUPPEN VON LINEAREN TRANSFORMATIONEN, By B. L. van der Waerden. 1935. 94 pages. 5½x8½. cloth. **$2.50**

From *Ergebnisse der Mathematik.*